

國立中央大學

統計研究所

碩士論文

廣義雙樣本問題之統計推論

指導教授：陳玉英博士

研究生：宋方元

中華民國九十四年七月



國立中央大學圖書館 碩博士論文電子檔授權書

(93 年 5 月最新修正版)

本授權書所授權之論文全文電子檔，為本人於國立中央大學，撰寫之碩/博士學位論文。(以下請擇一勾選)

- ()同意 (立即開放)
()同意 (一年後開放)，原因是：_____。
()同意 (二年後開放)，原因是：_____。
()不同意，原因是：_____。

以非專屬、無償授權國立中央大學圖書館與國家圖書館，基於推動讀者間「資源共享、互惠合作」之理念，於回饋社會與學術研究之目的，得不限地域、時間與次數，以紙本、微縮、光碟及其它各種方法將上列論文收錄、重製、公開陳列、與發行，或再授權他人以各種方法重製與利用，並得將數位化之上列論文與論文電子檔以上載網路方式，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名： 宋方元

論文名稱： 廣義雙樣本問題之統計推論

指導教授姓名： 陳玉英

系所： 統計 所 博士 碩士班

學號： 92225002

日期：民國 94 年 6 月 16 日

備註：

1. 本授權書請填寫並親筆簽名後，裝訂於各紙本論文封面後之次頁（全文電子檔內之授權書簽名，可用電腦打字代替）。
2. 請加印一份單張之授權書，填寫並親筆簽名後，於辦理離校時交圖書館（以統一代轉寄給國家圖書館）。
3. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文，應依著作權法相關規定辦理。

摘要

本文首先利用 Fligner-Policello (1981) 統計量與 Su-Wei (1993) 統計量建構一般雙樣本問題中兩個母體中位數差異的信賴區間，然後討論如何在一般的雙樣本問題中，應用修正的 Fligner-Policello 檢定，決定所需之最小的樣本數，並比較本文方法與其他方法所計算的樣本數差異。然後利用模擬研究，分別在對稱分布與非對稱分布之下，探討各種統計量建構信賴區間的差異性。最後進行實例分析說明本文所提方法之應用。

致 謝 辭

本論文得以順利完成由衷感謝指導教授 陳玉英博士，陳老師在學生研究所期間的殷殷教誨與悉心指教，著實令我獲益匪淺。還要感謝口試委員 嵇允嬋教授、謝國文教授與 鄭秀麗教授在論文口試當天，不吝於對學生提出指正，並提供許多寶貴的意見，致使本論文的內容更加充實完善，特此致上十二萬分的謝意。

在中央大學攻讀碩士這二年期間，首先要感謝我親愛的家人，有你們不斷地給予鼓勵，才能使我在遇到挫折時再站起來，你們是我支持下去的原動力。當然，還要感謝陪我一起成長、一起玩樂的同窗好友們：政侃、雨潔、勝全、玉華、軒御，你們的陪伴，使我的學生生涯增添許多歡笑與回憶；在此特別感謝壘球隊的隊友們，使我研究所的生活增添不少色彩。另外，我還要感謝玉媚學姐與啟軒學長，感謝你們在課業上的幫助，使我在危急時刻可以順利渡過。

謹將本文獻給摯愛的父母、親友、以及所有愛護關心我的人。

宋方元 謹識於

中央大學統計研究所

中華民國九十四年六月

目 錄

第一章 緒論	1
第二章 文獻回顧	4
2.1 Welch t 檢定	4
2.2 Fligner-Policello 檢定	5
2.3 應用 Mann-Whitney 檢定的樣本數決定	9
第三章 統計方法	12
3.1 中位數差異之區間估計	12
3.2 樣本數決定	14
第四章 模擬研究	22
4.1 模擬方法	22
4.2 模擬結果	24
第五章 實例分析	26
5.1 實例一	26
5.2 實例二	28
第六章 結論及未來研究	30
參考文獻	31

圖 目 錄

圖一： $\varphi_1(p)$ 圖.....	33
圖二：常態分布機率密度函數圖.....	33
圖三：雙指數分布機率密度函數圖.....	34
圖四：柯西分布機率密度函數圖.....	34
圖五：指數分布機率密度函數圖.....	35
圖六：實例一之資料盒圖.....	35
圖七：實例二之資料盒圖.....	36

表 目 錄

表一：n=10 之下，U 統計量之變異數與利用 Birnbaum & Klose 變異數 上界比較.....	18
表二：各種方法在 $\alpha=0.05$ ， $1-\beta=0.90$ 之下所需之最小樣本 數.....	20
表三：常態分布下母體中位數涵蓋機率表.....	37
表四：雙指數分布下母體中位數涵蓋機率表.....	41
表五：柯西分布下母體中位數涵蓋機率表.....	45
表六：指數分布下母體中位數涵蓋機率表.....	49
表七：不同基因差異交配下的工蜂數量.....	26
表八：不同基因差異交配下工蜂數量差異的各種95%信賴區間表.....	27
表九：不同性別下的肉酸素濃度.....	28
表十：不同性別下肉酸素濃度差異的各種95%信賴區間表.....	29

第一章 緒論

假設 X_1, \dots, X_m 與 Y_1, \dots, Y_n 為獨立抽樣自分布函數為 $F(x)$ 和 $G(y)$ 的隨機樣本。針對母體分布函數 $F(x)$ 與 $G(y) = F(y - \Delta)$ 的比較，已有相當多的文獻就兩個母體的位置參數 (location parameter) 差異 Δ 進行統計推論，例如，常態分布下雙樣本的學生化 t 檢定及非常態分布下的無母數檢定如 Mann-Whitney (1947) 檢定。

但是，除位置參數的差異外，兩個母體的尺度參數 (scale parameter) 也可能不同。因此 Welch (1938) 針對可能具有不同變異程度的兩個常態母體，提出廣義的 t 檢定，進行兩個母體平均數差異的檢定或建立信賴區間，此即為 Behrens-Fisher 問題。Fligner & Policello (1981) 則針對母體為對稱但非常態分布的廣義 Behrens-Fisher 問題，修正 Mann-Whitney 統計量檢定兩個分布的對稱點是否相等。此外，也有文獻討論如何結合位置參數檢定統計量以及尺度參數統計量，建構針對位置-尺度位移模式 (location-scale shift model) 的雙樣本檢定，例如 Neuhäuser (2001) 及 Lepage (1971)。

然而，雙樣本問題中兩個母體未必滿足位置-尺度位移模式，另

外，一般的雙樣本問題中母體分布未必對稱。所以本文僅假設樣本來自 $F(x)$ 與 $G(y)$ 且具有中位數為 θ_1 和 θ_2 ，亦即 $F(\theta_1) = G(\theta_2) = 1/2$ ，針對此廣義的雙樣本問題，討論兩個母體中位數差異的區間估計。

在抽樣調查之前，樣本數的決定是一個重要且實用的統計問題，一般而言，樣本數的決定是求出在特定的對立假說之下，為使所應用的檢定方法達到一定檢定力所需的最小樣本數。就兩個常態分布平均數的檢定而言，若變異數已知，可利用檢定力的設定進行樣本數的決定；若變異數未知，但得知其比例，Dette & O'Brien (2004) 求得對應之樣本數決定。然而真實的情形是兩個常態母體的變異數皆未知，且其變異數比率亦未知。

事實上，實務的資料未必服從常態分布。因此，Noether (1987) 討論應用 Mann-Whitney U 檢定的樣本數決定，在大樣本之下，當對立假說中的位置參數差異極小情形下，假設在虛無或對立假說之下 U 的變異數相同，Noether (1987) 獲得一個非常簡便的樣本數決定方法。Vollandt & Horn (1997) 則針對在虛無及對立假說之下， U 的變異數不同，建議求得對立假說之下， U 變異數的上限，然後獲得一個保守的最小樣本數。根據比較上述兩個最小樣本數，

Vollandt & Horn (1997) 結語 Noether (1987) 的樣本數決定相當穩健。然而，此二樣本數決定並未與真正所需的近似最小樣本數比較，其保守性有待討論。此外，上述兩種樣本數決定僅就檢定 $p = P(X_1 < Y_1)$ 是否為 0.5 而言。若檢定之虛無假說為 $H_0: p = p_0$ ($p_0 \neq 0.5$)，則上述兩個方法皆不適用。所以，本文針對應用 Mann-Whitney 統計量進行 $H_0: p = p_0$ 的檢定討論樣本數的決定。

本文在第二章回顧相關文獻，介紹 Welch (1938) 就 Behrens-Fisher 問題提出的 t 檢定及 Fligner-Policello 檢定，並且介紹前人如何在 Mann-Whitney 檢定之下選取適當的樣本數。第三章提出如何藉由修正 Fligner-Policello 統計量與 Su-Wei (1993) 統計量進行兩個母體中位數差異之區間估計。同時針對推廣 Mann-Whitney 檢定，提供一個較佳的樣本數決定方法，並且比較本文方法及文獻中各種方法決定樣本數的正確性。第四章則利用模擬研究，比較各種區間估計方法在對稱或非對稱分布之下涵蓋母體中位數差異的機率。第五章則進行實例分析。最後在第六章加以結論並說明未來的可能研究課題。

第二章 文獻回顧

本章回顧 Welch (1938) 針對 Behrens-Fisher 問題所推導出的 t-統計量，然後介紹 Fligner-Policello (1987) 檢定。最後回顧為使 Mann-Whitney 檢定滿足一定檢定力要求之下，近似樣本數的決定。

2.1 Welch t 檢定

假設 $F(x) = \Phi\left(\frac{x - \theta_1}{\sigma_1}\right)$ ， $G(y) = \Phi\left(\frac{y - \theta_2}{\sigma_2}\right)$ ，其中 $\Phi(\cdot)$ 為標準常態分布之分布函數。針對 $\Delta = \theta_2 - \theta_1$ 的檢定問題

布之分布函數。針對 $\Delta = \theta_2 - \theta_1$ 的檢定問題

$$H_0 : \Delta = \Delta_0 \quad v.s \quad H_1 : \Delta \neq \Delta_0 .$$

Welch (1938) 建議廣義 t 檢定之拒絕域為

$$\frac{|\bar{Y}_n - \bar{X}_m - \Delta_0|}{\sqrt{\frac{1}{m} S_1^2 + \frac{1}{n} S_2^2}} > t_{\alpha/2}(\hat{f}) ,$$

其中 \bar{X}_m 與 \bar{Y}_n 為樣本平均數，兩母體的變異數估計量分別為

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X}_m)^2 / m - 1, \quad S_2^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2 / n - 1, \quad t_a(\hat{f})$$

是自由度為 \hat{f} 的 t 分布之上 a 分位點 (quantile)，

$$\hat{f} = \frac{\left(\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}\right)^2}{\left(\frac{s_1^2}{m}\right)/(m-1) + \left(\frac{s_2^2}{n}\right)/(n-1)}。$$

經由檢定與信賴區間的互通性得知，Welch t 檢定可導出 Δ 的

100(1- α)% 信賴區間為

$$\left(\bar{Y}_n - \bar{X}_m - t_{\alpha/2}(\hat{f})\sqrt{\frac{1}{m}S_1^2 + \frac{1}{n}S_2^2}, \bar{Y}_n - \bar{X}_m + t_{\alpha/2}(\hat{f})\sqrt{\frac{1}{m}S_1^2 + \frac{1}{n}S_2^2} \right)。$$

2.2 Fligner-Policello 檢定

Mann-Whitney (1947) 針對 $G(x) = F(x - \Delta)$ 的位置位移模式提出檢定，其統計量為

$$U = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I(Y_j > X_i)，$$

其中若 $a > 0$ ，則 $I(a > 0) = 1$ ，否則 $I(a > 0) = 0$ 。令任二個不同樣本觀

察值之差為 D_1, \dots, D_M ， $M = mn$ ，則 U 可表示為

$$U = \sum_{i=1}^M I\{D_i > 0\}。$$

進一步應用檢定統計量 U 可推導得 Δ 的 100(1- α)% 信賴區間為

$[D_{(M-k+1)}, D_{(k)}]$ ，其中 k 為 U 的虛無分布上之 $\alpha/2$ 分位點， $D_{(k)}$ 則為

D_1, \dots, D_M 中的第 k 個順序統計量。當 $N = m+n \rightarrow \infty$ ，且 $m/N \rightarrow \lambda$ ，

$0 < \lambda < 1$ 時，若 $H_0: \Delta = 0$ 為真，則

$$\frac{U - \frac{mn}{2}}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}} \xrightarrow{d} N(0, 1)。$$

其中 \xrightarrow{d} 代表分布收斂。因此統計量 U 的虛無分布的上 $\alpha/2$ 分位點可進似為

$$k = \frac{mn}{2} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}。$$

若 $F(x) = F^*\left(\frac{x - \theta_1}{\sigma_1}\right)$ ， $G(y) = F^*\left(\frac{y - \theta_2}{\sigma_2}\right)$ ，Fligner & Policello

(1981) 則針對 $\Delta = \theta_2 - \theta_1$ 的檢定問題：

$$H_0: \Delta = 0 \quad v.s \quad H_1: \Delta \neq 0，$$

提出 Mann-Whitney 統計量的推廣檢定。因為檢定對象為位置參數的差異，但允許母體各具互異的尺度參數，所以此一問題又稱為雙樣本的廣義 Behrens-Fisher 問題。

令 $p = p(Y > X) = \int FdG$ ，則 $E(U) = mnp$ ，所以 U/mn 為 p 之點估計量。若 F 與 G 皆為對稱之分布函數，即便 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ，當 $\Delta = 0$ 時， $p = 1/2$ ，亦即 $E(U) = mn/2$ 。但是在 $H_0: \Delta = 0$ 之下，兩母體分布尺度參數或有不同， $Var(U)$ 不再是一個常數。根據 Birnbaum & Klose

(1957) 的結果，就一般的雙樣本問題而言，

$$(2.1) \quad \text{Var}(U) = mn[(n-1)\phi^2 + (m-1)\gamma^2 + p(1-p)] ,$$

其中

$$p = \int FdG$$

$$\phi^2 = \int G^2 dF - (\int GdF)^2 ,$$

$$\gamma^2 = \int F^2 dG - (\int FdG)^2$$

所以，Fligner & Policello (1981) 建議以經驗分布函數 (empirical distribution function) 帶入 \hat{F} 與 \hat{G} 估計 F 與 G ，求得 $\text{Var}(U)$ 的估計式為

$$\text{Var}^*(U) = mn[(n-1)\hat{\phi}^2 + (m-1)\hat{\gamma}^2 + \hat{p}(1-\hat{p})] ,$$

其中

$$\hat{p} = \int \hat{F}d\hat{G}$$

$$\hat{\phi}^2 = \int \hat{G}^2 d\hat{F} - (\int \hat{G}d\hat{F})^2 ,$$

$$\hat{\gamma}^2 = \int \hat{F}^2 d\hat{G} - (\int \hat{F}d\hat{G})^2$$

為方便計算，令 P_j 為 Y_j 在 X_1, \dots, X_m 中的定位 (placement)， Q_i 為 X_i 在 Y_1, \dots, Y_n 中的定位，即

$$P_j = \sum_{i=1}^m I\{Y_j > X_i\} ,$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n I\{X_i > Y_j\}$$

則 ϕ^2 、 γ^2 和 p 的估計式分別為

$$\begin{aligned}\hat{\phi}^2 &= \frac{1}{mn^2} \sum_{i=1}^m Q_i^2 - \frac{1}{m^2 n^2} \left(\sum_{i=1}^m Q_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{mn^2} \sum_{i=1}^m (Q_i - \bar{Q})^2 \\ \gamma^2 &= \frac{1}{m^2 n} \sum_{j=1}^n P_j^2 - \frac{1}{m^2 n^2} \left(\sum_{j=1}^n P_j \right)^2 \\ &= \frac{1}{m^2 n} \sum_{j=1}^n (P_j - \bar{P})^2, \\ \hat{P} &= \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^n P_j \\ &= \frac{1}{m} \bar{P}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Q_i \\ \bar{P} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P_j\end{aligned}$$

因此，獲得方便計算的 $Var(U)$ 之估計式：

$$\hat{Var}(U) = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^m (Q_i - \bar{Q})^2 + \frac{m-1}{m} \sum_{j=1}^n (P_j - \bar{P})^2 + \bar{P}\bar{Q},$$

進一步簡化 U 的變異數估計式為

$$\hat{Var}(U) = \sum_{i=1}^m (Q_i - \bar{Q})^2 + \sum_{j=1}^n (P_j - \bar{P})^2 + \bar{P}\bar{Q}.$$

最後 Fligner & Policello (1981) 針對兩個對稱分布是否具有相同對稱中心的檢定問題，建構統計量

$$\hat{U} = \frac{U - \frac{mn}{2}}{\sqrt{\hat{Var}(U)}}.$$

因為當 $N \rightarrow \infty$ ，且 $m/N \rightarrow \lambda$ ， $0 < \lambda < 1$ 時， $\hat{U} \xrightarrow{d} N(0,1)$ 。又因為

$$\begin{aligned} U - \frac{mn}{2} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I\{Y_j > X_i\} - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n P_j + \sum_{i=1}^m Q_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n P_j - \sum_{i=1}^m Q_i \right) \end{aligned}$$

所以，Fligner & Policello (1981) 最後建議使用檢定統計量

$$\hat{U} = \frac{\sum_{j=1}^n P_j - \sum_{i=1}^m Q_i}{2 \sqrt{\sum_{i=1}^m (Q_i - \bar{Q})^2 + \sum_{j=1}^n (P_j - \bar{P})^2 + \bar{P}\bar{Q}}}$$

當 $|\hat{U}| > z_{\alpha/2}$ 時，拒絕虛無假設 H_0 ，即結語兩母體之母體中位數（對稱點）具顯著的差異。

2.3 應用 Mann-Whitney 檢定的樣本數決定

就位置移動模式之下的檢定問題 $H_0: \Delta = 0$ v.s. $H_1: \Delta > 0$ 而言，若 H_0 為真，則 $p = 1/2$ ，若 H_1 為真，則 $p > 1/2$ 。假設在 $\Delta = \Delta_1 > 0$ 之下，亦即 $p = p_1 > 1/2$ 。Noether (1987) 針對應用 Mann-Whitney 檢定，在一定檢定力要求下，決定所需的最小樣本數。考慮在 H_1 之下當 Δ_1 （或 p_1 ）很接近 0（或 $1/2$ ）時，假設在 H_0 與 H_1 之下， U 統計量之變異數相同，因此，在滿足顯著水準小於 α ，檢定力大於 $1 - \beta$ 的情形下，推導出檢定 U 所需之最小樣本數。

在 H_a 之下， U 的檢定力為

$$\begin{aligned}
 \text{Power} &= P\left(U > \frac{mn}{2} + z_\alpha \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}} \mid H_a\right) \\
 &= P\left(\frac{U - mnp_1}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}} > \frac{\frac{mn}{2} - mnp_1 + z_\alpha \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}} \mid H_a\right), \\
 &= P\left(Z > \frac{mn\left(\frac{1}{2} - p_1\right) + z_\alpha \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}}\right) \geq 1 - \beta
 \end{aligned}$$

其中 Z 為標準常態分布隨機變數。所以個別母體的樣本數 m 與 n 應滿足

$$\frac{mn\left(\frac{1}{2} - p_1\right) + z_\alpha \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}} \leq z_{1-\beta},$$

在 $m = n$ 情形下，所需的最小樣本數即為

$$(2.2) \quad n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2}{6\left(p_1 - \frac{1}{2}\right)^2},$$

其中 z_p 為標準常態的上 $100P$ 分位點。考慮兩組樣本數為互異的情形，在給定抽樣比例 $m/N = \lambda$ 之下，Noether (1987) 進一步得到最小樣本數如下：

$$N = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2}{12\lambda(1-\lambda)\left(p_1 - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Vollandt & Horn (1997) 指出 U 的變異數在 H_0 與 H_1 之下不盡相

同，因此利用 Birnbaum & Klose (1957) 的結果找出在 $p < 1/2$ 時

Mann-Whitney 統計量的變異數上界如下：

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{U}{n^2}\right) &\leq \varphi(p) \\ &= \{n[(1-2p)^{3/2} + 6p(1-p) - 1] - (1-2p)^{3/2} - 3p(1-p) + 1\} / (3n^2) \circ \end{aligned}$$

並藉此一上界找出在對立假設 $H_1: p = p_1 < 1/2$ 之下，滿足檢定顯著水

準小於 α ，檢定力大於 $1 - \beta$ 的情形下，所需之最小樣本數為滿足以

下不等式的最小正整數：

$$\frac{1/2 - p_1 - z_{1-\alpha} \sqrt{(2n+1)/12n^2}}{\sqrt{(17n^2 - 20n + 6)/[12(2n-1)^3]}} \geq z_{1-\beta}, 3/8 < p < 1/2 \quad ,$$

$$\frac{1/2 - p_1 - z_{1-\alpha} \sqrt{(2n+1)/12n^2}}{\sqrt{(n\Delta_1 + \Delta_2)/(3n^2)}} \geq z_{1-\beta}, 0 < p < 3/8 \quad ,$$

其中 $\Delta_1 = 1/2 - 6\Delta^2 + (2\Delta)^{3/2}$ ， $\Delta_2 = 1/4 + 3\Delta^2 - (2\Delta)^{3/2}$ ， $\Delta = 1/2 - p$ 。

第三章 統計方法

令 X_1, X_2, \dots, X_m 與 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 為兩組獨立的隨機樣本，其分布函數分別為 $F(x)$ 及 $G(y)$ 。假設對應 F 與 G 的中位數為 θ_1 和 θ_2 。本章首先討論如何求得 $\Delta = \theta_2 - \theta_1$ 的信賴區間，然後針對一般化的雙樣本檢定問題，求出所需最小樣本數，使得該檢定達到要求的檢定力。

3.1 中位數差異之區間估計

針對母體中位數差異 $\Delta = \theta_2 - \theta_1$ 的推論，令

$$U(\Delta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I\{Y_j - (X_i + \Delta)\},$$

再令

$$\hat{U}(\Delta) = \frac{U(\Delta) - \frac{mn}{2}}{\sqrt{\hat{Var}(U(\Delta))}}.$$

其中 $\hat{Var}(U(\Delta))$ 列於公式 (2.1)，但是根據資料為 $X_1 + \Delta, \dots, X_m + \Delta$ 與 Y_1, \dots, Y_n 加以計算之。接著應用檢定與信賴區間的互通性，得知 Δ 的 $100(1 - \alpha)\%$ 信賴區間為

$$\{\Delta : \hat{U}(\Delta) = \frac{|U(\Delta) - \frac{mn}{2}|}{\sqrt{\hat{Var}(U(\Delta))}} < z_{\alpha/2}\}.$$

值得一提的是，此一信賴區間導於 Fligner-Policello 檢定，因此，適用於位置參數或對稱中心差異的推論。

令 $h(\Delta, \theta_1)$ 代表第二組的中位數。若研究對象為中位數差異，則 $h(\Delta, \theta_1) = \Delta + \theta_1$ ；若研究對象為中位數比率，則 $h(\Delta, \theta_1) = \Delta \theta_1$ 。亦即若 $h(\Delta, \theta_1) = \Delta + \theta_1$ ，則 $\Delta = \theta_2 - \theta_1$ ；若 $h(\Delta, \theta_1) = \Delta \theta_1$ ，則 $\Delta = \theta_2 / \theta_1$ 。本文引用 Su & Wei (1993) 的結果，建議統計量

$$W(\Delta, \theta_1) = \frac{(\hat{F}(\theta_1) - \frac{1}{2})^2}{\hat{\sigma}_1^2(\theta_1)} + \frac{(\hat{G}(h(\Delta, \theta_1)) - \frac{1}{2})^2}{\hat{\sigma}_2^2(h(\Delta, \theta_1))} ,$$

其中 \hat{F} 和 \hat{G} 為經驗分布函數， $\hat{\sigma}_1^2(x) = \frac{\hat{F}(x)[1 - \hat{F}(x)]}{m}$ 和 $\hat{\sigma}_2^2(y) = \frac{\hat{G}(y)[1 - \hat{G}(y)]}{n}$ 則分別為 $\hat{F}(x)$ 和 $\hat{G}(y)$ 的變異數估計式。

因為在虛無假設 $H_0: \Delta = 0$ (或 $\Delta = 1$) 之下， $W(\Delta, \theta_1)$ 服從自由度為 1 的卡方分布，因此，可以求得 Δ 的 $100(1 - \alpha)\%$ 信賴區間為

$$\{ \Delta : \min_{-\infty < \theta_1 < \infty} W(\Delta, \theta_1) \leq \chi_\alpha^2(1) \} ,$$

其中 $\chi_\alpha^2(1)$ 為自由度為 1 的卡方分布之上 α 分位點。

3.2 樣本數決定

Noether (1987) 與 Vollandt & Horn (1997) 考慮的檢定問題為

$$H_0 : \Delta = 0 \quad v.s \quad H_1 : \Delta > 0 .$$

就對稱分布而言，尺度參數不同但是位置參數差異 $\Delta = 0$ 時， $p = P(X_1 < Y_1) = 1/2$ 。但是在一般的雙樣本問題中，檢定的位置參數差異未必為 0。因此，本文考慮檢定假說

$$H_0 : p \leq p_0 \quad v.s \quad H_1 : p = p_1 > p_0 ,$$

其中 $0 < p_0 < 1$ 。此時我們建議推廣 Mann-Whitney 統計量，亦即

$$\hat{U}^* = \frac{U - mnp_0}{\sqrt{\text{Var}_0(U)}} ,$$

其中 $\text{Var}_0(U)$ 為 $\text{Var}(U)$ 受限於 $p \leq p_0$ 之下的變異數之最大值。因此，當 H_1 為真時，檢定的檢定力為

$$(3.1) \quad 1 - \Phi\left(\frac{mn(p_0 - p_1) + z_\alpha \sqrt{\text{Var}_0(U)}}{\sqrt{\text{Var}_1(U)}}\right) ,$$

其中 $\text{Var}_1(U)$ 為在 $p = p_1$ 時， U 的變異數， $\Phi(\cdot)$ 則為標準常態分布函數。

在此應用 Birnbaum & Klose (1957) 的結果得知，當 $m = n$ ，且 $p = p(X_1 < Y_1) \leq 1/2$ 時，Mann-Whitney 統計量 U 的變異數上界為

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{U}{n^2}\right) &\leq \varphi(p) \\ &= \frac{1}{3n^2} \{n[(1-2p)^{3/2} + 6p(1-p) - 1] - (1-2p)^{3/2} - 3p(1-p) + 1\} \end{aligned}$$

我們將此一結果推廣得知

【定理一】對 $0 < p < 1$ 而言，

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{U}{n^2}\right) &\leq \varphi_1(p) \\ &= \frac{1}{3n^2} \{n[|1-2p|^{3/2} + 6p(1-p) - 1] - |1-2p|^{3/2} - 3p(1-p) + 1\} \end{aligned}$$

【證明】

若 $p > 1/2$ 時，令 $q = 1 - p$ ，則 $q \leq 1/2$ ，因此將 (3.2) 式中 p 改寫為 q 即可得 (3.3) 式。

Vollandt & Horn (1997) 求出 $\varphi(p)$ 在 $p \leq 1/2$ 時僅有一個極值，並經由數學推導，得知 $\max \varphi(p) = \varphi(p_{\max})$ ，其中

$$p_{\max} = \frac{3n^2 - 2n}{2(2n-1)^2}。$$

所以得到 $\varphi(p)$ 的極大值為

$$\varphi(p_{\max}) = \frac{17n^2 - 20n + 6}{12(2n-1)^3}。$$

因為 p_{\max} 為 n 的單調遞減函數且當 n 夠大時趨近 $3/8$ 。同樣地經由微分亦可推得 $\varphi(p)$ 在 $0 < p < p_{\max}$ 之間為 p 的一個單調遞增函數，且

$p_{\max} > 3/8$ 。所以當 $0 < p < 3/8$ 之間， $\varphi(p)$ 必為正整數 n 的單調遞增函數。又 $\varphi(p)$ 是一個對稱於 $p = 1/2$ 的函數，所以可利用此特性，在不同的對立假設之下，給予適當的變異數上界以求得合理的樣本數大小。

圖一顯示 $\varphi_1(p)$ 在 $3/8 < p < 5/8$ 之間，呈現下降然後上升的形狀，因為 $\varphi_1(p)$ 為一非單調函數，所以本文建議在不同的 p_0 與 p_1 之下，給予不同的變異數上界。

考慮 $p_1 > p_0$ 的部分。若在任意假設之下直接使用 (3.2) 式當作變異數上界，則會發生在同樣的樣本數之下，檢定力未必隨著 p_1 與 p_0 差距加大而加大。滿足檢定力大於 $1 - \beta$ 的最小樣本數即滿足

$$(3.4) \quad \frac{p_0 - p_1 + z_\alpha \sigma_0}{z_\beta \sigma_1} \leq z_{1-\beta} \circ$$

爲了要確保在同樣的樣本數之下，當 p_1 與 p_0 差距加大時，檢定力為此一差距之遞增函數，所以本文建議採用在 $H_1: p = p_1 > p_0$ 之下 U 的最大變異數為 $\text{Var}_1(U)$ ，所以考慮分別在下述範圍內，選取適當的變異數上界。

若 $p_0 > 3/8$ ，採用 $\sigma_0^2 = \varphi_1(p_{\max})$ ；否則令 $\sigma_0^2 = \varphi_1(p_0)$ 。

若 $p_1 < 5/8$ ，令 $\sigma_1^2 = \varphi_1(p_{\max})$ ；否則採用 $\sigma_1^2 = \varphi_1(p_1)$ 。

因此，便可得到在 $0 < p_0 < p_1 < 1$ 的情形下，滿足 (3.4) 式的最小樣本數。以下就 p_0 及 p_1 的範圍，簡化不等式 (3.4)。

當 $0 < p_0 < 3/8, 0 < p_1 < 5/8, p_1 > p_0$ ，

$$\frac{p_0 - p_1 + z_\alpha \sqrt{\frac{1}{3n^2} [(n-1) |2p_0 - 1|^{\frac{3}{2}} + 3(2n-1)p_0(1-p_0) - (n-1)]}}{\sqrt{(17n^2 - 20n + 6)/[12(2n-1)^3]}} \leq z_{1-\beta}$$

當 $0 < p_0 < 3/8, 5/8 < p_1 < 1$ ，

$$\frac{p_0 - p_1 + z_\alpha \sqrt{\frac{1}{3n^2} [(n-1) |2p_0 - 1|^{\frac{3}{2}} + 3(2n-1)p_0(1-p_0) - (n-1)]}}{\sqrt{\frac{1}{3n^2} [(n-1) |2p_1 - 1|^{\frac{3}{2}} + 3(2n-1)p_1(1-p_1) - (n-1)]}} \leq z_{1-\beta}$$

當 $3/8 < p_0 < 5/8, 3/8 < p_1 < 5/8, p_1 > p_0$ ，

$$\frac{p_0 - p_1 + z_\alpha \sqrt{(17n^2 - 20n + 6)/[12(2n-1)^3]}}{\sqrt{(17n^2 - 20n + 6)/[12(2n-1)^3]}} \leq z_{1-\beta}$$

當 $3/8 < p_0 < 1, 5/8 < p_1 < 1, p_1 > p_0$ ，

$$\frac{p_0 - p_1 + z_\alpha \sqrt{(17n^2 - 20n + 6)/[12(2n-1)^3]}}{\sqrt{\frac{1}{3n^2} [(n-1) |2p_1 - 1|^{\frac{3}{2}} + 3(2n-1)p_1(1-p_1) - (n-1)]}} \leq z_{1-\beta}。$$

在此計算對稱分配與非對稱分配之 U 統計量的變異數與利用

Birnbaum & Klose 的變異數上界，如表一所示。

表一、 $n=10$ ， U 統計量之變異數與利用 Birnbaum & Klose 變異數上

界比較：

分布	真實變異數	變異數上界(BK)
$N(0, 1) \& N(0, 1)$	175.00	175.00
$N(0, 1) \& N(-2, 1)$	37.63	69.76
$N(0, 1) \& N(0, 25)$	215.59	175.00
$N(0, 25) \& N(0, 25)$	175.00	175.00
$N(0, 25) \& N(-2, 25)$	164.38	182.97
$Exp(0, 1) \& Exp(0, 1)$	175.00	175.00
$Exp(0, 1) \& Exp(-1, 1)$	105.07	135.97
$Exp(0, 2.5) \& Exp(0, 5)$	152.22	135.97
$Exp(0, 5) \& Exp(-1, 5)$	166.42	182.97
$Exp(0, 5) \& Exp(-3, 5)$	56.72	77.58

從表一可以發現，當兩母體尺度參數互異時，則 Birnbaum & Klose 的變異數上界會低估真實變異數，而當兩母體尺度參數一致時，即便位置參數互異甚至在非對稱分布下，Birnbaum & Klose 的變異數上界仍為良好的變異數上界，因此 Birnbaum & Klose 的變異數上界僅適用在兩母體具有相同尺度參數的分配上，所以在兩母體具有相同尺度參數的情形下，建議使用本文的樣本數決定方式來決定樣本數。

在此計算顯著水準 $\alpha=0.05$ 的修正 Fligner-Policello 檢定，要求其檢定力達到 $1-\beta=0.90$ 時，所需之最小樣本數。本文考慮 $F_1 = N(0,25)$ ， $G_1 = N(\mu,25)$ 與 $F_2 = Exp(0,5)$ ， $G_2 = Exp(\mu,5)$ 情形之下，

檢定

$$H_0 : p \leq p_0 \quad v.s \quad H_1 : p = p_1 > p_0 ,$$

其中在兩母體為常態分布下，

$$p_0 = \Phi\left(\frac{\mu_0}{\sqrt{25+25}}\right) ,$$

$$p_1 = \Phi\left(\frac{\mu_1}{\sqrt{25+25}}\right) .$$

兩母體為指數分布下，

$$p_0 = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{\mu_0}{25}\right\} ,$$

$$p_1 = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{\mu_1}{25}\right\} .$$

分別在 H_0 與 H_1 之下，計算 U 之變異數（公式 2.1），帶入（3.4）式中求出真正的近似最小樣本數，記作 n^* （常態分布）與 n^{**} （指數分布）。同時計算 Noether（1987）與本文所提利用推廣 Birnbaum & Klose 不等式所求的最小樣本數，分別記作 nN 、以及 nB 。藉著與 n^* 與 n^{**} 的比較，評估上述三方法的表現。計算結果如表二所示。因為 Noether（1987）僅針對虛無假設為 $H_0 : p = 0.5$ 決定樣本數，所以 nN 在此僅表列 $p_0 = 0.5$ 部分。

表二、在 $\alpha=0.05$ ， $1-\beta=0.90$ 之下 Noether 與本文所提方法的最小樣本數，其中 n^* 與 n^{**} 分別為常態與指數分布下的真實樣本數。

p_0	$p_1 - p_0$	nN	nB	n^*	n^{**}
0.1	0.1		105	56	68
	0.2		27	18	20
	0.3		12	9	10
	0.4		7	6	6
	0.5		5	4	4
	0.6		3	3	3
	0.7		2	2	2
	0.8		2	2	2
0.2	0.1		135	96	104
	0.2		34	27	29
	0.3		16	13	13
	0.4		9	7	8
	0.5		6	5	5
	0.6		4	3	3
	0.7		3	2	2
0.3	0.1		149	124	128
	0.2		38	33	33
	0.3		17	15	15
	0.4		10	8	8
	0.5		6	5	5
	0.6		4	3	3
0.4	0.1		152	140	141
	0.2		39	35	35
	0.3		17	15	15
	0.4		9	8	8
	0.5		5	4	5
0.5	0.1	143	152	141	141
	0.2	36	38	34	34
	0.3	16	16	14	14
	0.4	9	8	7	7

由表二得知，本文所提利用 Birnbaum & Klose 不等式計算之最小樣本數在兩母體具相同尺度參數，即便是非對稱分布之下，所計算的樣本數雖有高估，但是皆與真實之樣本數相當接近。

第四章 模擬研究

4.1 模擬方法

本文針對具有不同位置參數與尺度參數的各種對稱分布與非對稱分布，研究分別應用 Welch t 統計量 (t)、Mann-Whitney 統計量 (MW)、Fligner-Policello 檢定統計量 (FP) 與 Su-Wei 統計量 (SW)，建構的中位數差異信賴區間之正確涵蓋機率 (coverage probability)。考慮中的對稱分布包含常態分布、雙指數分布與柯西分布；非對稱分布則為指數分布。圖二至圖五為各種分布改變尺度參數的機率密度函數圖：圖二至圖四分別為改變尺度參數的常態分布、雙指數分布與柯西分布；圖五則為改變尺度參數的指數分布。吾人可從上述圖形中看出非對稱分布改變尺度參數後偏離對稱分布的情形。

使用 International Mathematics and Statistical Library (簡稱 IMSL) 的附屬程式生成隨機變數。就常態分布而言，此處使用 RNNOF 生成標準常態隨機變數當作對照組，再生成另一組具有不同位置參數與尺度參數的常態隨機變數當作處理組。雙指數分布隨機

變數使用 RNEXT 加以生成，首先生成標準指數隨機變數 V ，再利用 RNUNF 生成 $U(0,1)$ 隨機變數 U ，若 $U > 0.5$ ，則取 $X = V$ ，否則令 $X = -V$ ，如此可得一組雙指數分布隨機變數組成對照組。以類似方法，首先生成一組指數分布 $Exp(\beta)$ 的隨機變數 V ，再生成一 $U(0,1)$ 隨機變數 U ，若 $U > 0.5$ ，則令 $Y = V + \mu$ ，否則 $Y = -V + \mu$ ，便可得一組位置參數為 μ ，但是尺度參數為 β 的雙指數分布隨機變數為處理組。柯西分布方面則利用 RNCHY 生成服從柯西分布 $C(0,1)$ 的隨機變數成對照組，再生成一組服從柯西分布 $C(\mu, \theta)$ 當作處理組。就指數分布而言，本文則使用 RNEXT 生成尺度參數為 1 的指數分布隨機變數為對照組，處理組為具不同尺度參數與位置參數的指數隨機變數。

在每一種分布之下，考慮樣本數 $m = n = 25$ 、 $m = n = 50$ 、 $m = 25, n = 50$ 與 $m = 50, n = 25$ ，每一次的模擬次數為 10,000 次，根據模擬的雙樣本資料分別求出母體中位數差異的 95% 信賴區間，然後計數 10,000 個區間涵蓋真正中位數差異的比例，藉以估計 95% 信賴區間的涵蓋機率。模擬結果列於表三至表六。

4.2 模擬結果

根據表三至表五可以清楚發現當兩樣本數相同時由 Fligner & Policello 檢定建立的信賴區間 FP，在對稱分布之下，保持相當接近但是略低於信心水準的涵蓋機率。Mann-Whitney 檢定建立的信賴區間 MW 在兩母體具相同尺度參數時涵蓋機率可以維持一定的水準，但當兩母體尺度參數互異時，其涵蓋機率一般會低於信心水準。但是，若樣本數的配置與尺度參數不一致時，MW 的涵蓋機率將高於設定之信心水準。Welch t 檢定建立的信賴區間 t 在常態分布之下，無論尺度參數如何變化，皆呈現相當令人滿意的結果。但是若兩母體分布相當地偏離常態時，其涵蓋機率便會嚴重的高於信心水準。Su-Wei 信賴區間 SW 的涵蓋機率一般是呈現高於信心水準的保守情形，特別是當樣本小或樣本數配置與尺度參數不一致時，SW 結果會更加地保守。此一結果如 Su & Wei (1993) 的研究所示。

根據表六，當母體分布不對稱時，上述 FP、MW 與 t 三種方法所計算的信賴區間其涵蓋機率皆無法達到設定的信心水準，但是，相對而言，FP 信賴區間涵蓋機率仍比 t 與 MW 更加靠近信心水準。惟有 SW 的涵蓋機率仍可維持在信心水準以上。因此本文建議，在對稱

母體與未知母體分布之下，採用 FP 與 SW 來計算母體中位數差異的
信賴區間為佳。

第五章 實例分析

5.1 實例一

根據 Markus (2002) 所述，實驗者利用人工繁殖的方式，施予母王蜂兩種不同的交配對象：分別為與母王蜂基因差異較小的雄蜂，以及與母王蜂基因差異較大的雄蜂，藉以評估基因差異對大黃蜂群居數量影響。實驗結果如表七所示：

表七：不同基因差異交配下的工蜂數量

基因差異	樣本數 (群體數)	工蜂數量
低	12	40, 14, 18, 28, 11, 39, 17, 37, 52, 30, 65, 35
高	7	14, 24, 26, 98, 12, 105, 85

其中樣本數代表抽樣的群體數，而群居數量則是一個群體中工蜂的數量。此一雙樣本資料中，低基因差異的樣本標準差為 16.073，高基因差異的樣本標準差為 41.869。資料的盒圖展示於圖八。利用 Mood 檢定可得到 p 值為 0.074，顯示在 95% 信心水準下可保留此二樣本來自尺度參數一致的母體。接著利用各種 95% 信賴區間計算如表八所示：

表八：不同基因差異交配下工蜂數量的各種95%信賴區間表

方法	信賴區間下界	信賴區間上界
FP	-14.00	63.00
t	-16.37	56.04
MW	-16.00	66.00
SW	-2.00	12.99

此四種方法皆顯示在顯著水準為0.05時，基因差異對大黃蜂群居的數量沒有顯著差異。信賴區間FP、t及MW的區間長度沒有太大的差異，但是信賴區間SW區間長度卻最窄。由圖三得知，對稱分布並不適於描述此二筆資料。而FP、t及MW三種方法乃針對對稱母體的中位數加以檢定，所以當母體嚴重偏離對稱分布且樣本數過小的情形下，便不適宜利用FP、t及MW計算母體中位數差異信賴區間。所以利用FP、t與MW三種方法所得之信賴區間，皆不及SU呈現的。

5.2 實例二

根據 Dufner、Jensen 與 Schumacher (1992) 三位學者所述，欲比較性別差異對血漿 (blood plasma) 中肉酸素 (carnitine) 濃度的影響，藉由病人的抽樣，得到的結果表九所示：

表九：不同性別下的肉酸素濃度

性別	樣本數	肉酸素濃度
男性	10	23.01, 25.56, 25.69, 28.31, 29.37, 29.65, 33.60 37.17, 38.98, 40.32
女性	11	23.85, 26.63, 37.39, 38.73, 39.26, 39.67, 41.94 43.41, 43.76, 48.79, 65.11

肉酸素是一種將血液中的蛋白質 (protein) 轉換成脂肪酸 (fatty acids) 的粒腺體 (mitochondrial)，肉酸素的增加將會導致食慾上升而間接影響人體的重量。此一雙樣本資料中，男性病人樣本的標準差為 6.041，女性病人樣本的標準差為 10.860。資料的盒圖展示於圖九。利用 Mood 檢定可得到 p 值為 0.363，顯示在 95% 信心水準下可保留此二樣本來自尺度參數一致的母體。利用對稱性檢定可得到男性與女性的 p 值分別為 0.579 與 0.842，顯示在 95% 信心水準下可保留此二樣本來自對稱分布。利用 Kolmogorov-Smirnov 檢定可得

男性與女性的 p 值分別為 0.823 與 0.717，顯示在 95% 信心水準下可保留此二樣本來自常態分布。接著利用各種 95% 信賴區間計算如表十所示：

表十：不同性別下肉酸素濃度差異的各種 95% 信賴區間表

方法	信賴區間下界	信賴區間上界
FP	1.57	15.19
t	1.92	17.30
MW	1.07	15.72
SW	-1.71	14.37

信賴區間 FP、t 與 MW 結果沒有太大的差別，皆顯示在信心水準為 95% 時，不同性別之人體血漿內肉酸素濃度有顯著性的差異。由圖四可視出，此二筆資料略顯偏離對稱分布，但因為資料分散程度不大，所以 FP、t 與 MW 表現仍可接受，惟 SU 呈現較為保守的結果。

第六章 結論及未來研究

本文提出應用 Fligner & Policello (1981) 統計量與 Su & Wei (1993) 統計量建構兩母體中位數差異的信賴區間。模擬研究結果顯示，應用 Fligner & Policello (1981) 統計量建立之區間在對稱分布但尺度參數互異之下，涵蓋機率仍可維持其信心水準，而在非對稱分布之下，應用 Su & Wei (1993) 統計量建立之區間不失為一個好的解決之道。若可進一步地找出 Fligner & Policello (1981) 統計量與 Su & Wei (1993) 統計量在小樣本數之下的臨界值，則信賴區間涵蓋機率可以更接近信心水準。

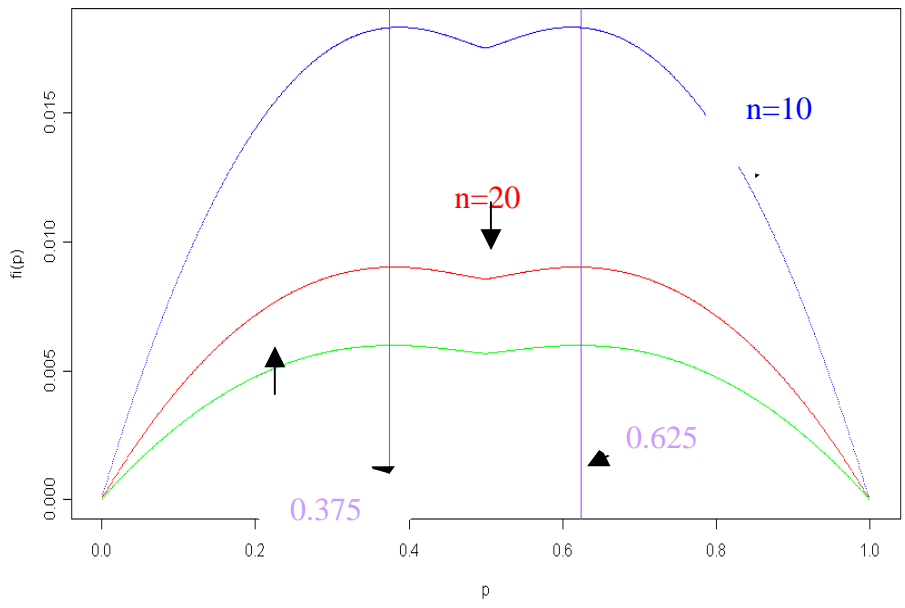
在樣本數決定方面，為使修正 Fligner-Policello 檢定方法達到一定的檢定力時，本文利用變異數上界，求得所需的最小樣本數。所以在分布未知但兩母體具有相同變異的情況之下，本文建議使用本文提出的樣本數來進行抽樣。

本文的雙樣本推論結果預期可以推廣至多樣本問題。除了可以在變異不均質情形下建構成對處理組中位數差異的信賴區間，也可以進行各處理組與對照組中位數差異的區間估計。

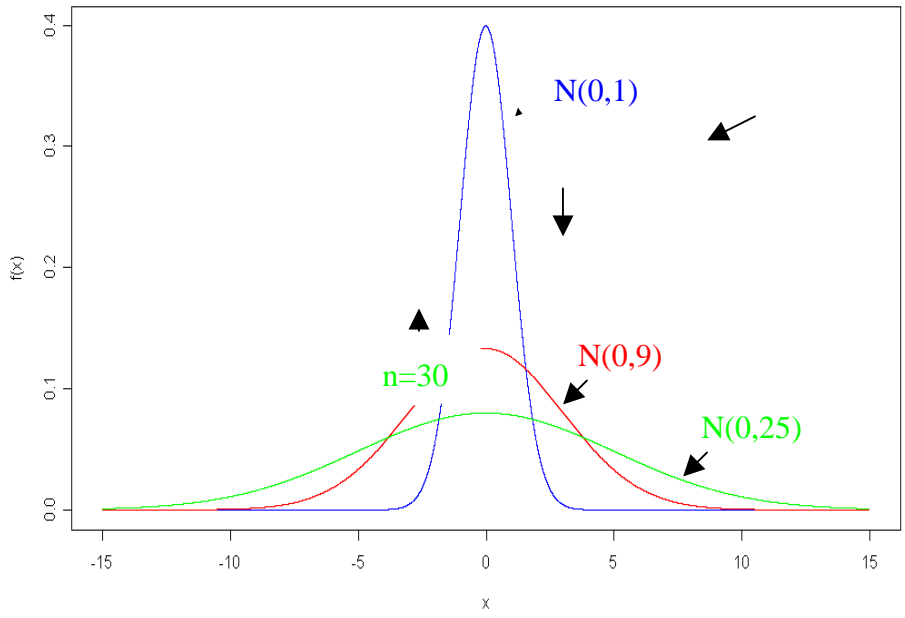
參考文獻

1. Baer, B. and Schmid-Hempel, P. (1999). Experimental variation in polyandry affects parasite loads and fitness in a bumble-bee. *Nature*, 397, 151-154.
2. Birnbaum, Z.W. and Klose, O.M. (1957). Bounds for the variance of the Mann-Whitney statistic. *Annals of Mathematical Statistics* 28, 933-945.
3. Dette, H. and O'Brine, T.E. (2004). Efficient experimental design for the Behrens-Fisher problem with application to bioassay. *The American Statistician* 58, 138-143.
4. Dufner, J., Jensen, U., and Munk, A. (1994). *Statistik mit SAS*. Stuttgart: B. G. Teubner Studienbücher Mathematik.
5. Fligner, M.A. and Policello, G.E. II (1981). Robust rank procedures for the Behrens-Fisher problem. *Journal of the American Statistical Association* 76, 162-168.
6. Lepage, Y. (1971). A combination of Wilcoxon's and Ansari-Bradley's statistics. *Biometrika* 58, 213-217.
7. Mann, H.B. and Whitney, D.R. (1947). On a test whether one of two random variables is stochastically larger than the

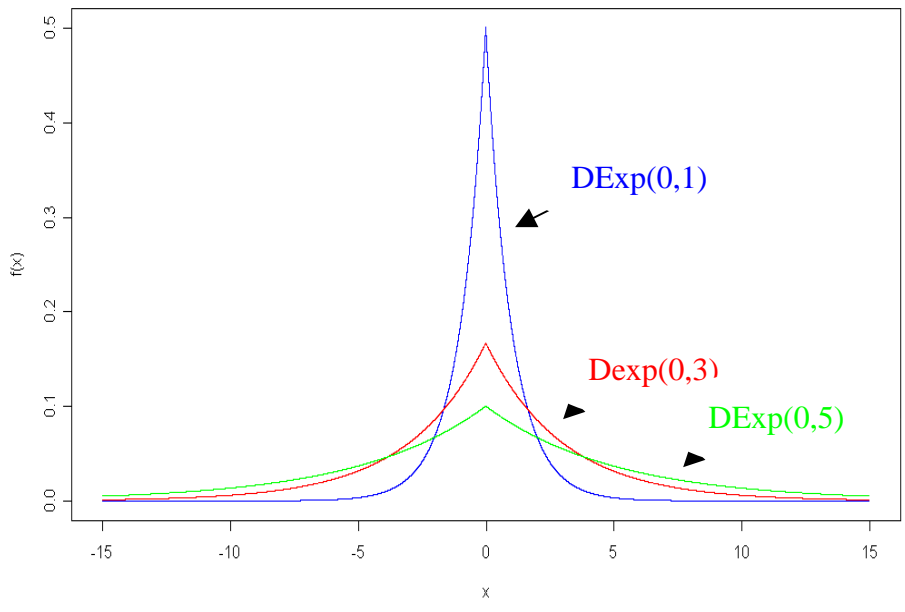
- other. *Annals of Mathematical Statistics* 18, 50-60.
8. Neuhäuser, M. (2001). An adaptive location-scale test. *Biometrical Journal* 7, 809-819.
 9. Noether, G.E. (1987). Sample size determination for some common nonparametric tests. *Journal of the American Statistical Association* 82, 645-647.
 10. Su, J.Q. and Wei, L.J. (1993). Nonparametric estimation for the difference or ratio of median failure times. *Biometrics* 49, 603-607.
 11. Vollandt, R. and Horn, M. (1997). Evaluation of Noether's method of sample size determination for the Wilcoxon-Mann-Whitney test. *Biometrical Journal* 39, 823-829.



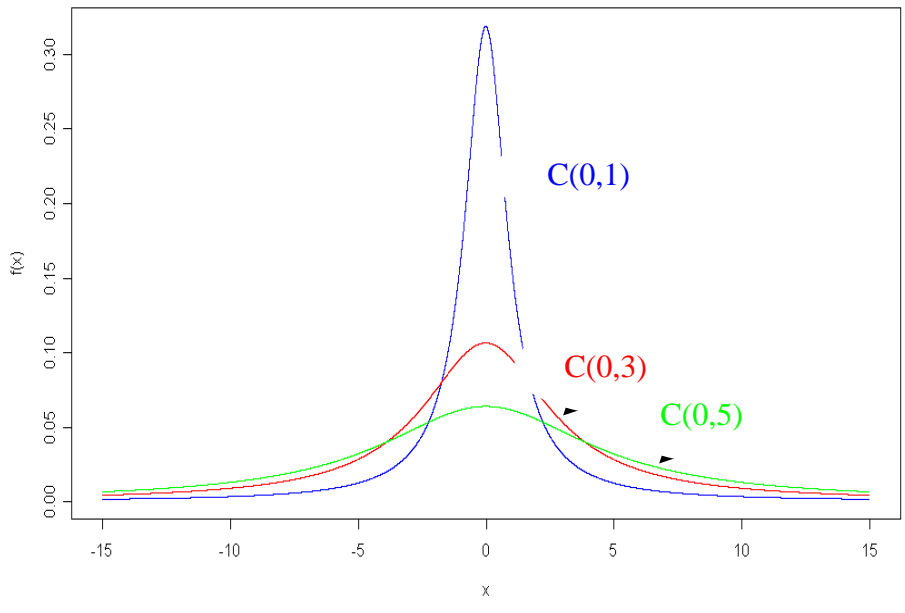
圖一： $\varphi_1(p)$ 圖



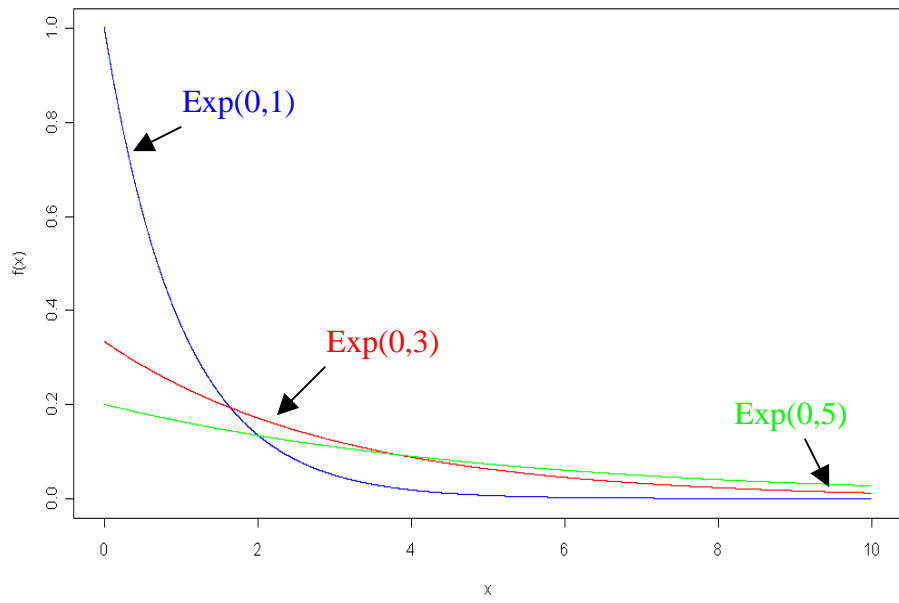
圖二：常態分布機率密度函數圖



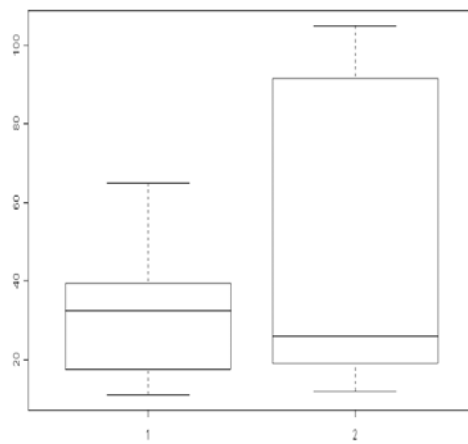
圖三：雙指數分布機率密度函數圖



圖四：柯西分布機率密度函數圖



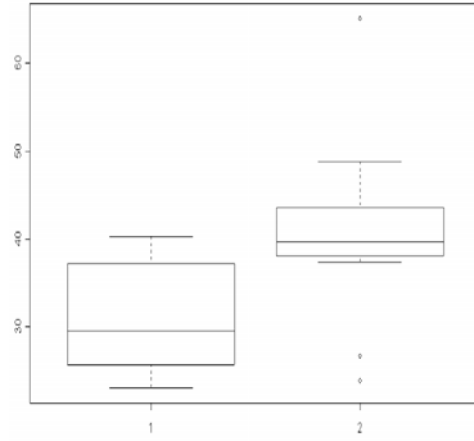
圖五：指數分布機率密度函數圖



圖六：實例一低基因差異(左圖)與高基因差異(右圖)交配下工蜂群

居

數之盒圖



圖七：實例二男性(左圖)與女性(右圖)血酸素濃度之盒圖

表三：常態分布下，當 $\alpha=0.05$ 時，母體中位數差異的涵蓋機率

$$X \sim N(0,1), \quad Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

(a) $m=n=25$

μ	σ^2	FP	t	MW	SW
0	1	0.944	0.946	0.950	0.968
	9	0.942	0.948	0.934	0.963
	25	0.941	0.947	0.925	0.963
1	1	0.940	0.941	0.948	0.967
	9	0.943	0.945	0.934	0.966
	25	0.940	0.946	0.922	0.960
2	1	0.945	0.945	0.952	0.966
	9	0.942	0.945	0.933	0.962
	25	0.938	0.944	0.919	0.964
3	1	0.944	0.945	0.950	0.967
	9	0.937	0.942	0.928	0.967
	25	0.941	0.947	0.921	0.960
4	1	0.946	0.948	0.952	0.965
	9	0.940	0.946	0.933	0.961
	25	0.938	0.943	0.918	0.961
5	1	0.940	0.943	0.948	0.966
	9	0.946	0.950	0.937	0.966
	25	0.942	0.949	0.923	0.964

續表三：常態分布下，當 $\alpha=0.05$ 時，母體中位數差異的涵蓋機率

$$X \sim N(0,1), \quad Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

(b) $m=n=50$

μ	σ^2	FP	T	MW	SW
0	1	0.947	0.947	0.950	0.966
	3	0.948	0.949	0.934	0.962
	5	0.947	0.948	0.922	0.958
1	1	0.947	0.946	0.950	0.967
	9	0.949	0.948	0.935	0.961
	25	0.943	0.950	0.919	0.955
2	1	0.948	0.948	0.952	0.967
	9	0.946	0.950	0.933	0.962
	25	0.945	0.948	0.919	0.954
3	1	0.950	0.947	0.952	0.967
	9	0.945	0.947	0.933	0.962
	25	0.942	0.952	0.919	0.956
4	1	0.947	0.946	0.950	0.966
	9	0.944	0.946	0.930	0.963
	25	0.948	0.949	0.922	0.953
5	1	0.947	0.948	0.950	0.967
	9	0.946	0.946	0.931	0.960
	25	0.944	0.948	0.918	0.954

續表三：常態分布下，當 $\alpha=0.05$ 時，母體中位數差異的涵蓋機率

$$X \sim N(0,1), \quad Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

(c) $m=25, n=50$

μ	σ^2	FP	T	MW	SW
0	1	0.941	0.947	0.950	0.967
	9	0.945	0.945	0.964	0.958
	25	0.947	0.946	0.965	0.955
1	1	0.942	0.949	0.950	0.965
	9	0.949	0.953	0.970	0.958
	25	0.947	0.949	0.964	0.956
2	1	0.942	0.944	0.949	0.964
	9	0.947	0.946	0.970	0.960
	25	0.949	0.947	0.965	0.956
3	1	0.941	0.944	0.948	0.969
	9	0.950	0.949	0.968	0.960
	25	0.951	0.950	0.967	0.952
4	1	0.942	0.946	0.950	0.967
	9	0.950	0.950	0.969	0.960
	25	0.948	0.950	0.966	0.954
5	1	0.939	0.943	0.948	0.964
	9	0.949	0.949	0.968	0.957
	25	0.946	0.945	0.966	0.956

續表三：常態分布下，當 $\alpha=0.05$ 時，母體中位數差異的涵蓋機率

$$X \sim N(0,1), \quad Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

(d) $m=50, n=25$

μ	σ^2	FP	T	MW	SW
0	1	0.945	0.947	0.952	0.968
	9	0.933	0.944	0.889	0.962
	25	0.935	0.944	0.873	0.960
1	1	0.941	0.945	0.949	0.972
	9	0.931	0.943	0.887	0.965
	25	0.938	0.945	0.870	0.963
2	1	0.946	0.947	0.953	0.970
	9	0.938	0.947	0.894	0.965
	25	0.940	0.948	0.875	0.964
3	1	0.944	0.946	0.951	0.969
	9	0.937	0.948	0.895	0.965
	25	0.934	0.947	0.870	0.961
4	1	0.945	0.947	0.953	0.971
	9	0.936	0.945	0.893	0.961
	25	0.939	0.948	0.875	0.960
5	1	0.944	0.944	0.950	0.971
	9	0.935	0.944	0.889	0.964
	25	0.931	0.941	0.863	0.965

表四：雙指數分布下，當 $\alpha=0.05$ 時，母體中位數的涵蓋機率

$$X \sim Dexp(0,1) , Y \sim Dexp(\mu,\theta)$$

(a) $m=n=25$

μ	β	FP	t	MW	SW
0	1	0.941	0.945	0.948	0.969
	3	0.936	0.947	0.911	0.966
	5	0.938	0.945	0.896	0.963
1	1	0.945	0.949	0.952	0.969
	3	0.939	0.949	0.915	0.963
	5	0.937	0.942	0.898	0.962
2	1	0.943	0.948	0.951	0.967
	3	0.942	0.949	0.917	0.966
	5	0.943	0.950	0.902	0.965
3	1	0.943	0.946	0.948	0.962
	3	0.940	0.947	0.918	0.963
	5	0.943	0.949	0.901	0.965
4	1	0.944	0.949	0.949	0.967
	3	0.940	0.949	0.917	0.962
	5	0.942	0.947	0.901	0.960
5	1	0.947	0.951	0.955	0.961
	3	0.940	0.947	0.916	0.963
	5	0.940	0.950	0.902	0.962

續表四：雙指數分布下，當 $\alpha=0.05$ 時，母體中位數的涵蓋機率

$$X \sim \text{Dexp}(0,1) , Y \sim \text{Dexp}(\mu,\theta)$$

(b) $m=n=50$

μ	β	FP	t	MW	SW
0	1	0.948	0.947	0.950	0.966
	3	0.940	0.949	0.910	0.961
	5	0.944	0.948	0.902	0.953
1	1	0.949	0.950	0.952	0.965
	3	0.947	0.948	0.937	0.959
	5	0.950	0.950	0.928	0.957
2	1	0.949	0.950	0.952	0.963
	3	0.944	0.947	0.934	0.965
	5	0.942	0.947	0.925	0.954
3	1	0.945	0.948	0.949	0.964
	3	0.946	0.946	0.938	0.960
	5	0.945	0.948	0.925	0.951
4	1	0.945	0.943	0.948	0.964
	3	0.949	0.947	0.940	0.964
	5	0.944	0.950	0.926	0.957
5	1	0.946	0.949	0.949	0.968
	3	0.949	0.950	0.940	0.964
	5	0.942	0.950	0.925	0.957

續表四：雙指數分布下，當 $\alpha = 0.05$ 時，母體中位數差異的涵蓋機率

$$X \sim Dexp(0,1) , Y \sim Dexp(\mu, \theta)$$

(c) $m=25$, $n=50$

μ	β	FP	t	MW	SW
0	1	0.941	0.946	0.948	0.964
	3	0.944	0.948	0.961	0.957
	5	0.944	0.945	0.958	0.957
1	1	0.944	0.946	0.951	0.966
	3	0.949	0.953	0.966	0.956
	5	0.947	0.946	0.958	0.954
2	1	0.944	0.947	0.953	0.957
	3	0.950	0.948	0.965	0.968
	5	0.943	0.947	0.954	0.959
3	1	0.942	0.946	0.951	0.965
	3	0.947	0.949	0.964	0.968
	5	0.944	0.948	0.955	0.955
4	1	0.942	0.946	0.947	0.966
	3	0.945	0.947	0.962	0.956
	5	0.945	0.949	0.956	0.959
5	1	0.938	0.943	0.948	0.966
	3	0.944	0.948	0.961	0.965
	5	0.948	0.950	0.960	0.957

續表四：雙指數分布下，當 $\alpha = 0.05$ 時，母體中位數差異的涵蓋機率

$$X \sim Dexp(0,1) , Y \sim Dexp(\mu, \theta)$$

(d) $m=50$, $n=25$

μ	β	FP	T	MW	SW
0	1	0.940	0.949	0.949	0.967
	3	0.943	0.952	0.874	0.964
	5	0.943	0.949	0.853	0.963
1	1	0.945	0.952	0.953	0.970
	3	0.939	0.949	0.871	0.968
	5	0.938	0.942	0.845	0.962
2	1	0.942	0.949	0.952	0.969
	3	0.936	0.949	0.864	0.967
	5	0.941	0.946	0.849	0.964
3	1	0.943	0.945	0.951	0.971
	3	0.939	0.950	0.871	0.965
	5	0.940	0.951	0.851	0.964
4	1	0.941	0.945	0.949	0.970
	3	0.935	0.948	0.868	0.965
	5	0.936	0.951	0.844	0.963
5	1	0.947	0.951	0.954	0.970
	3	0.939	0.951	0.869	0.966
	5	0.936	0.946	0.847	0.961

表五：柯西分布下，當 $\alpha=0.05$ 時，母體中位數差異的涵蓋機率

$$X \sim C(0,1), Y \sim C(\mu, \theta)$$

(a) $m=n=25$

μ	θ	FP	t	MW	SW
0	1	0.945	0.978	0.953	0.972
	3	0.938	0.979	0.921	0.965
	5	0.936	0.978	0.905	0.960
1	1	0.939	0.980	0.947	0.966
	3	0.940	0.977	0.923	0.962
	5	0.941	0.978	0.912	0.959
2	1	0.939	0.978	0.944	0.965
	3	0.940	0.978	0.923	0.959
	5	0.938	0.978	0.911	0.963
3	1	0.944	0.975	0.950	0.968
	3	0.943	0.976	0.924	0.962
	5	0.934	0.977	0.906	0.960
4	1	0.941	0.979	0.948	0.969
	3	0.940	0.978	0.924	0.963
	5	0.937	0.977	0.905	0.963
5	1	0.947	0.975	0.954	0.968
	3	0.942	0.977	0.925	0.964
	5	0.936	0.978	0.907	0.960

續表五：柯西分布下，當 $\alpha=0.05$ 時，母體中位數差異的涵蓋機率

$$X \sim C(0,1) , Y \sim C(\mu, \theta)$$

(b) $m=n=50$

μ	θ	FP	t	MW	SW
0	1	0.947	0.978	0.950	0.967
	3	0.948	0.980	0.920	0.959
	5	0.948	0.977	0.915	0.954
1	1	0.945	0.979	0.949	0.964
	3	0.944	0.977	0.939	0.963
	5	0.944	0.979	0.930	0.955
2	1	0.950	0.980	0.953	0.969
	3	0.950	0.978	0.945	0.962
	5	0.944	0.976	0.931	0.956
3	1	0.946	0.977	0.950	0.966
	3	0.948	0.977	0.943	0.961
	5	0.946	0.978	0.932	0.955
4	1	0.947	0.979	0.951	0.966
	3	0.945	0.977	0.939	0.960
	5	0.944	0.980	0.932	0.955
5	1	0.944	0.980	0.948	0.967
	3	0.947	0.980	0.943	0.961
	5	0.944	0.977	0.931	0.952

續表五：柯西分布下，當 $\alpha=0.05$ 時，母體中位數差異的涵蓋機率

$$X \sim C(0,1) , Y \sim C(\mu, \theta)$$

(c) $m=25, n=50$

μ	θ	FP	t	MW	SW
0	1	0.943	0.979	0.950	0.962
	3	0.947	0.980	0.966	0.959
	5	0.946	0.979	0.959	0.956
1	1	0.943	0.978	0.950	0.968
	3	0.945	0.979	0.962	0.966
	5	0.943	0.978	0.958	0.968
2	1	0.942	0.975	0.950	0.966
	3	0.946	0.977	0.963	0.964
	5	0.950	0.979	0.962	0.964
3	1	0.945	0.978	0.951	0.966
	3	0.945	0.979	0.962	0.959
	5	0.949	0.975	0.962	0.958
4	1	0.945	0.977	0.952	0.968
	3	0.948	0.978	0.965	0.962
	5	0.946	0.978	0.960	0.957
5	1	0.943	0.978	0.951	0.957
	3	0.944	0.975	0.959	0.965
	5	0.949	0.979	0.961	0.966

續表五：柯西分布下，當 $\alpha = 0.05$ 時，母體中位數差異的涵蓋機率

$$X \sim C(0,1), Y \sim C(\mu, \theta)$$

(d) $m=50, n=25$

μ	θ	FP	t	MW	SW
0	1	0.946	0.979	0.954	0.972
	3	0.938	0.977	0.882	0.965
	5	0.939	0.977	0.861	0.959
1	1	0.939	0.975	0.948	0.969
	3	0.934	0.973	0.872	0.965
	5	0.937	0.978	0.861	0.958
2	1	0.944	0.979	0.950	0.966
	3	0.935	0.978	0.880	0.967
	5	0.938	0.981	0.860	0.961
3	1	0.943	0.981	0.951	0.969
	3	0.939	0.980	0.878	0.966
	5	0.938	0.977	0.862	0.960
4	1	0.946	0.979	0.954	0.970
	3	0.937	0.976	0.879	0.965
	5	0.934	0.976	0.859	0.963
5	1	0.940	0.975	0.946	0.969
	3	0.938	0.976	0.882	0.961
	5	0.934	0.976	0.858	0.964

表六：指數分布下，當 $\alpha = 0.05$ 時，母體中位數差異的涵蓋機率

$$X \sim Exp(1,1) , Y \sim Exp(\mu, \theta)$$

(a) $m=n=25$

μ	θ	FP	t	MW	SW
0	1	0.944	0.951	0.952	0.966
	3	0.926	0.887	0.917	0.958
	5	0.932	0.843	0.912	0.962
1	1	0.942	0.949	0.948	0.968
	3	0.927	0.894	0.914	0.962
	5	0.933	0.846	0.913	0.961
2	1	0.944	0.948	0.951	0.964
	3	0.926	0.889	0.915	0.962
	5	0.933	0.845	0.913	0.960
3	1	0.940	0.947	0.949	0.963
	3	0.927	0.887	0.916	0.960
	5	0.930	0.847	0.909	0.961
4	1	0.941	0.949	0.947	0.970
	3	0.927	0.894	0.916	0.960
	5	0.934	0.850	0.914	0.961
5	1	0.941	0.947	0.949	0.965
	3	0.931	0.893	0.920	0.959
	5	0.935	0.845	0.913	0.966

續表六：指數分布下，當 $\alpha = 0.05$ 時，母體中位數差異的涵蓋機率

$$X \sim \text{Exp}(1,1) , Y \sim \text{Exp}(\mu, \theta)$$

(b) $m=n=50$

μ	θ	FP	t	MW	SW
0	1	0.945	0.947	0.948	0.961
	3	0.921	0.766	0.904	0.962
	5	0.931	0.641	0.900	0.953
1	1	0.948	0.951	0.953	0.958
	3	0.924	0.764	0.905	0.962
	5	0.934	0.642	0.906	0.954
2	1	0.948	0.946	0.951	0.962
	3	0.925	0.773	0.907	0.958
	5	0.928	0.634	0.898	0.951
3	1	0.946	0.949	0.950	0.957
	3	0.916	0.761	0.895	0.959
	5	0.933	0.635	0.904	0.958
4	1	0.944	0.951	0.947	0.963
	3	0.918	0.769	0.899	0.962
	5	0.928	0.635	0.904	0.953
5	1	0.945	0.948	0.950	0.958
	3	0.919	0.770	0.901	0.961
	5	0.933	0.641	0.905	0.956

續表六：指數分布下，當 $\alpha = 0.05$ 時，母體中位數差異的涵蓋機率

$$X \sim \text{Exp}(1,1), Y \sim \text{Exp}(\mu, \theta)$$

(c) $m=25, n=50$

μ	θ	FP	t	MW	SW
0	1	0.946	0.944	0.953	0.969
	3	0.928	0.773	0.955	0.960
	5	0.931	0.648	0.955	0.956
1	1	0.946	0.944	0.953	0.969
	3	0.922	0.774	0.952	0.952
	5	0.935	0.640	0.957	0.960
2	1	0.945	0.945	0.953	0.964
	3	0.925	0.775	0.953	0.951
	5	0.933	0.651	0.955	0.954
3	1	0.941	0.942	0.949	0.966
	3	0.921	0.774	0.950	0.955
	5	0.933	0.646	0.954	0.969
4	1	0.942	0.943	0.951	0.970
	3	0.926	0.768	0.951	0.955
	5	0.930	0.653	0.954	0.958
5	1	0.946	0.942	0.952	0.962
	3	0.921	0.771	0.948	0.958
	5	0.931	0.655	0.953	0.959

續表六：指數分布下，當 $\alpha = 0.05$ 時，母體中位數差異的涵蓋機率

$$X \sim \text{Exp}(1,1) , Y \sim \text{Exp}(\mu, \theta)$$

(d) $m=50$, $n=25$

μ	θ	FP	t	MW	SW
0	1	0.951	0.947	0.955	0.963
	3	0.922	0.896	0.872	0.965
	5	0.927	0.841	0.858	0.961
1	1	0.945	0.946	0.952	0.963
	3	0.923	0.889	0.872	0.966
	5	0.927	0.846	0.856	0.956
2	1	0.943	0.943	0.950	0.968
	3	0.921	0.889	0.871	0.964
	5	0.936	0.852	0.868	0.963
3	1	0.942	0.943	0.949	0.967
	3	0.918	0.889	0.864	0.965
	5	0.926	0.846	0.860	0.962
4	1	0.942	0.941	0.951	0.962
	3	0.920	0.893	0.869	0.963
	5	0.933	0.853	0.864	0.962
5	1	0.941	0.942	0.948	0.963
	3	0.923	0.894	0.871	0.963
	5	0.930	0.850	0.863	0.964