

國立中央大學

統計研究所
碩士論文

右設限韋伯成對存活資料之分析

研究生：陳紋玲

指導教授：陳玉英博士

中華民國九十八年一月



國立中央大學圖書館 碩博士論文電子檔授權書

(95 年 7 月最新修正版)

本授權書所授權之論文全文電子檔(不包含紙本、詳備註 1 說明)，為本人於國立中央大學，撰寫之碩/博士學位論文。(以下請擇一勾選)

- ()同意 (立即開放)
()同意 (一年後開放)，原因是： _____
()同意 (二年後開放)，原因是： _____
()不同意，原因是： _____

以非專屬、無償授權國立中央大學圖書館與國家圖書館，基於推動「資源共享、互惠合作」之理念，於回饋社會與學術研究之目的，得不限地域、時間與次數，以紙本、微縮、光碟及其它各種方法將上列論文收錄、重製、公開陳列、與發行，或再授權他人以各種方法重製與利用，並得將數位化之上列論文與論文電子檔以上載網路方式，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名： _____ 陳紋玲 _____ 學號： 92225011

論文名稱： 右設限韋伯成對存活資料之分析

指導教授姓名： _____ 陳玉英 博士 _____

系所： _____ 統計 _____ 所 博士班 碩士班

日期：民國 98 年 1 月 14 日

備註：

1. 本授權書之授權範圍僅限電子檔，紙本論文部分依著作權法第 15 條第 3 款之規定，採推定原則即預設同意圖書館得公開上架閱覽，如您有申請專利或投稿等考量，不同意紙本上架陳列，須另行加填聲明書，詳細說明與紙本聲明書請至 <http://blog.lib.ncu.edu.tw/plog/> 碩博士論文專區查閱下載。
2. 本授權書請填寫並親筆簽名後，裝訂於各紙本論文封面後之次頁（全文電子檔內之授權書簽名，可用電腦打字代替）。
3. 請加印一份單張之授權書，填寫並親筆簽名後，於辦理離校時交圖書館（以統一代轉寄給國家圖書館）。
4. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文，應依著作權法相關規定辦理。

摘要

本文針對具右設限的成對存活資料，檢定兩個存活時間邊際分配是否為相同的韋伯(Weibull)分配。Owen et al. (2000)與 Caroni (2008)曾在相同的致病傾向參數(frailty parameter)下，針對獨立的服從韋伯分配之成對存活時間，研究兩個存活時間分配是否相等。本文則是針對服從二元韋伯分配的相關成對存活時間，分別根據成對存活時間及其比率建立模式，並且推導檢定相同韋伯邊際分配的概似比檢定方法。本文除採用模擬方法研究所提檢定方法的型 I 誤差率及檢定力表現，也以實例說明所提檢定方法的應用。

Abstract

In this article, we are concerned with testing for the equality of the two marginal weibull distributions for paired survival data that are subjected to random right-censorship. Owen et al. (2000) and Caroni (2008) have discussed the tests when the paired data are independently distributed to weibull distributions given the frailty parameter. This article constructs likelihood ratio tests based on the correlated paired data and the ratio of each pair, respectively, when bivariate weibull distributions are under consideration. The results of a simulation study are presented for the investigation of type I error rate and power of the proposed tests. Finally, the application of the tests is illustrated by using a real data set.

誌謝

感謝指導老師陳玉英教授這兩年多來在專業知識以及研究態度的悉心指導，也很感謝老師耐心為我解惑在成對樣本右設限資料的研究過程中所遇到的問題。感謝口試委員鄒宗山老師、曾議寬老師給予本篇論文寶貴意見，讓我受益良多，使得本篇論文更豐富完整。

每當研究遇到挫折時，家人的關心與鼓勵是支持我的動力，謝謝父母與外公、外婆對我的栽培，謝謝舅舅、阿姨、弟弟、妹妹總是為我加油打氣。其次，感謝穎頻、文明、啟軒學長、玉媚學姊常常撥空回答我的問題，使我論文得已順利完成。

最後，謝謝我生命中所有的貴人，因為有你們的支持與鼓勵，讓我在遇到挫折時，仍能勇敢的向前邁進。未來，我會更努力，不斷充實與超越自己，願將此論文的完成，榮譽與你們共享。

陳紋玲 謹識
于國立中央大學統計研究所
中華民國九十八年一月

目錄

第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機及目的.....	1
1.2 文獻回顧.....	3
第二章 統計方法.....	6
2.1 根據成對存活時間建立之概似比檢定.....	6
2.2 根據存活時間比率建立之概似比檢定.....	9
第三章 模擬研究.....	13
3.1 模擬方法.....	13
3.2 模擬研究.....	14
第四章 實例分析.....	16
第五章 結論與討論.....	18
參考文獻.....	19
附錄.....	21

圖目錄

- 圖一 具有相同形狀參數的二元韋伯分配之下，相關係數 ρ
與相依參數 δ 之函數關係圖.....23
- 圖二 成對存活時間設限比例為 20%、形狀參數 $\beta = 0.5$ 、
樣本數 $n=50$ 、顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，兩種成對資料檢
定方法之檢定力與相關係數曲線圖 23
- 圖三 燒燙傷患者植皮資料之 Kaplan-Meier 估計24
- 圖四 燒燙傷患者植皮資料之對數累積風險函數圖 24

表目錄

表一	在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 及樣本數 n 之下，兩種成對資料 檢定方法之型 I 誤差率估計	25
表二	在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 及樣本數 $n=50$ 之下，兩種成對資 料檢定方法之檢定力估計	28
表三	燒燙傷患者植皮之資料	30

第一章 緒論

1.1 研究動機及目的

在醫學研究中進行兩種處理或藥物療效的比較，經常收集的是成對的時間資料，例如：為研究兩種藥對燒燙傷皮膚的療效，針對病人受傷的雙手分別給予不同處理，然後紀錄其自治療開始至復原的時間；為研究某種處理對防治兒童白齒蛀牙的效果，牙醫於一側的白齒預做處理，另一側的白齒則為對照組，然後觀察此處理能否有效延長白齒蛀牙的時間；為研究某種藥物對急性白血病的治癒效果，針對患有急性白血病的雙胞胎分別給予藥物與安慰劑，並紀錄其自服藥開始至治癒的時間。在研究期限內，成對資料中的研究對象可能中途退出或因研究時間有限，而產生設限資料。當成對資料的研究對象為同一個體時，可能發生單一右設限，亦即成對資料同時設限；反之，成對的研究對象若為兩個體，則可能發生二個研究對象在不同時間設限，稱為雙右設限。

近年來，已有許多文獻提出研究成對存活資料之邊際分配是否相同的檢定方法。O'Brien and Fleming (1987)，Akritas (1990)，Jung (1999)，Murray (2001)與楊政學 (2006)皆就右設限成對資料提出無母數檢定方法。Owen et al. (2000)則就完整觀測的成對存活時間，假設

在相同的致病傾向參數(frailty parameter)下，兩個成對存活時間變數條件獨立且個別邊際分配為具有相同形狀參數(shape parameter)的韋伯分配(Weibull distribution)，導出此二變數比率之自然對數的分配為羅吉斯分配(logistic distribution)，再據此結果建立檢定邊際分配是否相等的檢定方法。Caroni (2008)則就 Owen et al. (2000)所提的條件獨立之韋伯成對存活時間變數為右設限時，進行邊際韋伯分配相同的檢定。

因為一般的成對存活資料應是相關的，所以本文根據 Hougaard (1986) 所提二元韋伯分配配適成對存活時間，然後針對可能右設限的成對存活時間及其比率建立統計方法，檢定兩個存活邊際分配的相等性。事實上，Hougaard (1986) 所提的二元韋伯分配也是 Gumbel(1960) 關聯結構函數(附錄)。

本文將在下一節回顧相關文獻。在第二章以二元韋伯聯合分配配適右設限的成對存活時間，也就成對存活時間的比率加以分析，然後建立各自的概似比(likelihood ratio)檢定方法。在第三章展現在各種二元韋伯分配，不同設限型態及設限比例之下，比較上述兩種檢定方法的模擬結果。在第四章進行燒燙傷患者植皮成對資料的實例分析。最後，在第五章結語並進行討論。

1.2 文獻回顧

Owen et al. (2000) 假設在相同的致病傾向參數 η 下(例如:雙胞胎有相同的基因組織或在同一診所的病患,所用的醫療設備與醫護人員相同),成對兩個存活時間 X 和 Y 互相獨立且分別服從形狀參數為 β , 但是尺度參數分別為 θ_1 及 θ_2 的韋伯分配, 其中

$$\theta_1 = (\eta\lambda_1)^{-1} \text{ 和 } \theta_2 = (\eta\lambda_2)^{-1}。$$

因此, 檢視成對存活邊際分配是否相同, 即檢定 $H_0: \lambda_1 = \lambda_2$ 。又隨機變數 $S = \ln(X/Y)$ 服從位置參數為 $\mu^* = \ln(\theta_1/\theta_2)$, 尺度參數為 $\sigma^* = 1/\beta$ 的羅吉斯分配, 所以, 虛無假設可以改寫成 $H_0: \mu^* = 0$ 。

Hougaard (1986) 提出的二元韋伯分配之邊際分配仍為韋伯分配, 但是可能具有不同的尺度參數或形狀參數, 此外, 在此種二元韋伯分配之下, 時間變數 T_1 和 T_2 可以是相關的, 其存活函數為

$$\bar{F}(t_1, t_2) = P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = e^{-[(\frac{t_1}{\theta_1})^{\beta_1} + (\frac{t_2}{\theta_2})^{\beta_2}]^\delta}, t_j > 0, j = 1, 2, \quad (1)$$

其中 $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0$, 且 $0 < \delta \leq 1$, 記作 $(T_1, T_2) \sim W(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2, \delta)$ 。

進一步可求 T_1 及 T_2 的邊際存活函數分別為

$$\bar{F}_1(t_1) = P(T_1 > t_1) = \bar{F}(t_1, 0) = e^{-\left(\frac{t_1}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}, t_1 > 0$$

及

$$\overline{F}_2(t_2) = P(T_2 > t_2) = \overline{F}(0, t_2) = e^{-\left(\frac{t_2}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}, t_2 > 0。$$

由(1)式推導可得知二元韋伯機率密度函數為

$$f(t_1, t_2) = \frac{\beta_1 \beta_2}{\theta_1 \theta_2} \left(\frac{t_1}{\theta_1}\right)^{\beta_1-1} \left(\frac{t_2}{\theta_2}\right)^{\beta_2-1} \left[\left(\frac{t_1}{\theta_1}\right)^{\beta_1} + \left(\frac{t_2}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right]^{\delta-2} \left\{\left[\left(\frac{t_1}{\theta_1}\right)^{\beta_1} + \left(\frac{t_2}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right]^{\delta} + \frac{1}{\delta} - 1\right\} e^{-\left[\left(\frac{t_1}{\theta_1}\right)^{\beta_1} + \left(\frac{t_2}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right]^{\delta}}。$$

在模擬研究中需要生成 (T_1, T_2) 隨機變數，根據 Lu and Bhattacharyya (1990) 的結果，令隨機變數

$$Z_1 = \left(\frac{T_1}{\theta_1}\right)^{\beta_1} \text{ 和 } Z_2 = \left(\frac{T_2}{\theta_2}\right)^{\beta_2}，$$

再令

$$U = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \text{ 和 } V = (Z_1 + Z_2)^{\delta}，$$

則 U 和 V 獨立， U 服從均勻分配， $u(0,1)$ ，且 V 的機率密度函數為

$$h(v) = e^{-v} [\delta v + (1 - \delta)], v > 0。$$

因此，經過轉換可得到

$$T_1 = U^{\frac{\delta}{\beta_1}} V^{\frac{1}{\beta_1}} \theta_1 \text{ 和 } T_2 = (1-U)^{\frac{\delta}{\beta_2}} V^{\frac{1}{\beta_2}} \theta_2，$$

其中 (T_1, T_2) 的動差通式為

$$\begin{aligned} E(T_1^m T_2^n) &= \theta_1^m \theta_2^n E[U^{\frac{m\delta}{\beta_1}} (1-U)^{\frac{n\delta}{\beta_2}}] E(V^{\frac{m}{\beta_1} + \frac{n}{\beta_2}}) \\ &= \frac{\Gamma(m\delta / \beta_1 + 1) \Gamma(n\delta / \beta_2 + 1) \Gamma(m / \beta_1 + n / \beta_2 + 1) \theta_1^m \theta_2^n}{\Gamma[\delta(m / \beta_1 + n / \beta_2) + 1]}。 \end{aligned}$$

在相同形狀參數下， $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ，兩隨機變數

$$T_1 = U^{\frac{\delta}{\beta}} V^{\frac{1}{\beta}} \theta_1 \quad \text{和} \quad T_2 = (1-U)^{\frac{\delta}{\beta}} V^{\frac{1}{\beta}} \theta_2,$$

因此，令 $W = T_1 / T_2$ ，則

$$\ln W = \mu + \sigma \varepsilon, \quad (2)$$

其中 $\mu = \ln(\theta_1 / \theta_2)$ ， $\sigma = \delta / \beta$ ，且隨機變數 $\varepsilon = \ln(U / 1-U)$ 服從標準羅吉斯分配(standard logistic distribution)，亦即 $\ln W$ 為服從位置參數 μ 及尺度參數 σ 的羅吉斯分配。進一步可求得兩存活時間 T_1 和 T_2 的相關係數為

$$\rho = \text{Corr}(T_1, T_2) = \frac{\left\{ \frac{[\Gamma(\frac{\delta}{\beta} + 1)]^2 \Gamma(\frac{2}{\beta} + 1)}{\Gamma(\frac{2\delta}{\beta} + 1)} - [\Gamma(\frac{1}{\beta} + 1)]^2 \right\}}{\Gamma(\frac{2}{\beta} + 1) - [\Gamma(\frac{1}{\beta} + 1)]^2}.$$

事實上，相關係數 ρ 與形狀參數 β 及 δ 有關。在 β 給定之下， δ 與 ρ 有關，所以參數 δ 又稱為相依參數(dependence parameter)。當 $\delta = 1$ 時， $\rho = 0$ ； δ 靠近 0 時， ρ 接近 1。在具有相同形狀參數的二元韋伯分配之下，相關係數 ρ 與相依參數 δ 之函數關係展示在圖一。由圖一可知，當形狀參數 β 靠近 1 時，相關係數 ρ 與相依參數 δ 接近線性關係。

第二章 統計方法

令 T_{ij} 為第 i 對受測者接受第 j 個處理組的存活時間, C_{ij} 為對應 T_{ij} 的右設限時間, 且 T_{ij} 與 C_{ij} 獨立, $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2$ 。就獨立受測的 n 對資料而言, 在右設限之下, 可以觀察到的時間及其設限指標為 $\{T_{ij}^*, C_{ij}, i=1,\dots,n, j=1,2\}$, 其中 $T_{ij}^* = \min(T_{ij}, C_{ij})$, $d_{ij} = I(T_{ij} < C_{ij}) = 1$ 若 $T_{ij} < C_{ij}$; 否則 $d_{ij} = 0$ 。假設成對存活時間 (T_{i1}, T_{i2}) , $i=1,2,\dots,n$, 獨立地服從二元韋伯分配, 亦即 $(T_{i1}, T_{i2}) \sim W(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2, \delta)$, $i=1,2,\dots,n$ 。在此分配之下, 若 $\theta_1 = \theta_2$ 且 $\beta_1 = \beta_2$, 則 T_{i1} 及 T_{i2} 具有相同的邊際韋伯分配。本章討論如何根據可能右設限的成對存活資料建立適當的統計方法檢定虛無假設 $H_0: \theta_1 = \theta_2, \beta_1 = \beta_2$ 。

2.1 根據成對存活時間建立之概似比檢定

在雙右設限之下, 可觀察到的二元韋伯時間變數 (T_{i1}^*, T_{i2}^*) , $i=1,2,\dots,n$, 有四種可能情形: T_{i1}^* 與 T_{i2}^* 都是完整資料 ($d_{i1} = d_{i2} = 1$); 其中一個時間為右設限 ($d_{i1} = 1, d_{i2} = 0$ 或 $d_{i1} = 0, d_{i2} = 1$); 或是兩者皆為右設限資料 ($d_{i1} = d_{i2} = 0$)。本文首先根據 Frees and Valdez (1998) 的研究, 根據右設限的二元韋伯隨機變數建立參數 $(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2, \delta)$ 的概似函數為

$$L(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2, \delta) = \prod_{\{i:d_{i1}=d_{i2}=1\}} f(t_{i1}^*, t_{i2}^*) \prod_{\{i:d_{i1}=1, d_{i2}=0\}} \frac{\partial}{\partial t_{i1}^*} P(T_{i1} \leq t_{i1}^*, T_{i2} > t_{i2}^*)$$

$$\prod_{\{i:d_{i1}=0, d_{i2}=1\}} \frac{\partial}{\partial t_{i2}^*} P(T_{i1} > t_{i1}^*, T_{i2} \leq t_{i2}^*) \prod_{\{i:d_{i1}=d_{i2}=0\}} P(T_{i1} > t_{i1}^*, T_{i2} > t_{i2}^*)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_{i1}^*} P(T_{i1} \leq t_{i1}^*, T_{i2} > t_{i2}^*) &= \frac{\partial}{\partial t_{i1}^*} [\overline{F}_2(t_{i2}^*) - \overline{F}(t_{i1}^*, t_{i2}^*)] \\ &= \frac{\partial}{\partial t_{i1}^*} \left\{ e^{-\left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} - e^{-\left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\delta}}\right]^\delta} \right\} \\ &= e^{-\left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\delta}}\right]^\delta} \left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right]^{\delta-1} \frac{\beta_1}{\theta_1} \left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\delta}-1} \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_{i2}^*} P(T_{i1} > t_{i1}^*, T_{i2} \leq t_{i2}^*) &= \frac{\partial}{\partial t_{i2}^*} [\overline{F}_1(t_{i1}^*) - \overline{F}(t_{i1}^*, t_{i2}^*)] \\ &= e^{-\left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\delta}}\right]^\delta} \left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right]^{\delta-1} \frac{\beta_2}{\theta_2} \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\delta}-1} \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
& L(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2, \delta) \\
&= \prod_{\{i:d_{i1}=d_{i2}=1\}} \left\{ \frac{\beta_1 \beta_2}{\theta_1 \theta_2} \left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\beta_1-1} \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\beta_2-1} \left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right]^{\delta-2} \left\{ \left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right]^{\delta} + \frac{1}{\delta} - 1 \right\} e^{-\left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right]^{\delta}} \right\} \\
&\quad \prod_{\{i:d_{i1}=1, d_{i2}=0\}} \left\{ e^{-\left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right]^{\delta}} \left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right]^{\delta-1} \frac{\beta_1}{\theta_1} \left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1-1}{\delta}} \right\} \\
&\quad \prod_{\{i:d_{i1}=0, d_{i2}=1\}} \left\{ e^{-\left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right]^{\delta}} \left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right]^{\delta-1} \frac{\beta_2}{\theta_2} \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2-1}{\delta}} \right\} \\
&\quad \prod_{\{i:d_{i1}=d_{i2}=0\}} \left\{ e^{-\left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right]^{\delta}} \right\}.
\end{aligned}$$

進一步求得對數概似函數為

$$\begin{aligned}
& \ln L(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2, \delta) \\
&= \sum_{\{i:d_{i1}=d_{i2}=1\}} \left\{ \ln \beta_1 + \ln \beta_2 - \ln(\theta_1 \theta_2) + \left(\frac{\beta_1}{\delta} - 1 \right) \ln \left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right) + \left(\frac{\beta_2}{\delta} - 1 \right) \ln \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right) + (\delta - 2) \ln \left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right] \right. \\
&\quad \left. + \ln \left\{ \left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right]^{\delta} + \frac{1}{\delta} - 1 \right\} - \left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right]^{\delta} \right\} \\
&\quad + \sum_{\{i:d_{i1}=1, d_{i2}=0\}} \left\{ (\delta - 1) \ln \left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right] - \left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right]^{\delta} + \ln \beta_1 - \ln \theta_1 + \left(\frac{\beta_1}{\delta} - 1 \right) \ln \left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{\{i:d_{i1}=0, d_{i2}=1\}} \left\{ (\delta - 1) \ln \left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right] - \left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right]^{\delta} + \ln \beta_2 - \ln \theta_2 + \left(\frac{\beta_2}{\delta} - 1 \right) \ln \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right) \right\} \\
&\quad - \sum_{\{i:d_{i1}=0, d_{i2}=0\}} \left[\left(\frac{t_{i1}^*}{\theta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\delta}} + \left(\frac{t_{i2}^*}{\theta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\delta}} \right]^{\delta}. \tag{3}
\end{aligned}$$

在資料 $\{(t_{ij}^*, d_{ij}), i=1,2,\dots,n, j=1,2\}$ 給定之下，可應用 **R** 統計軟體中的附

屬程式 *constrOptim*，根據公式(3)求得 $(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2, \delta)$ 的最大概似估計

式(MLE) $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\delta})$ ，並且估計其共變異數 $COV(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\delta})$ 。

在 $H_0: \theta_1 = \theta_2 = \theta, \beta_1 = \beta_2 = \beta$ 之下，可求得對數概似函數，令所求 $(\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2, \delta)$ 的 MLE 為 $(\tilde{\theta}, \tilde{\theta}, \tilde{\beta}, \tilde{\beta}, \tilde{\delta})$ ，則其最大概似函數為 $L(\tilde{\theta}, \tilde{\theta}, \tilde{\beta}, \tilde{\beta}, \tilde{\delta})$ 。在一般的參數空間中，最大概似函數為 $L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\delta})$ 。因此，概似比統計量為

$$-2\ln \Lambda = -2[\ln L(\tilde{\theta}, \tilde{\theta}, \tilde{\beta}, \tilde{\beta}, \tilde{\delta}) - \ln L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\delta})],$$

並且在虛無假設下， $-2\ln \Lambda$ 的漸近分配為自由度為 2 的卡方分配。所以，若 $-2\ln \Lambda > \chi_{2,\alpha}^2$ 則宣稱成對存活邊際分配有差異，其中 $\chi_{2,\alpha}^2$ 為自由度為 2 的卡方分配之 $100(1-\alpha)$ 百分位。

2.2 根據存活時間比率建立之概似比檢定

本節考慮存活時間比率 $W_i = T_{i1} / T_{i2}$ ， $i=1,2,\dots,n$ ，其中 T_{i1} 及 T_{i2} 服從形狀參數相同的二元韋伯分配(Hougaard, 1986)。Lu and Bhattacharyya (1990) 指出隨機變數 $\ln W_i$ 服從羅吉斯分配，其位置參數為 $\mu = \ln(\theta_1 / \theta_2)$ ，尺度參數為 $\sigma = \delta / \beta$ 。若將觀測的 W_i 值，記作 W_i^* 。當 T_{i1} 及 T_{i2} 皆右設限時，對於 W_i 的資訊不足，資料無法採用；相對的，若 T_{i1} 及 T_{i2} 皆未設限，則 W_i 可以完整觀測。此外，若 T_{i1} 為右設限， T_{i2} 完整觀測，則 $W_i^* < W_i$ ，故資料為右設限；但是，若 T_{i1} 完整觀測， T_{i2} 為右設限，

則 $W_i < W_i^*$ ，故資料為左設限。因此，比率資料 W_i 可能受制於雙重設限 (doubly censored)。

因為成對資料是獨立的，時間比率 $W_i, i=1, 2, \dots, n$ ，為具有相同分配且互相獨立的隨機變數。為能根據觀測資料 $W_1^* = w_1^*, \dots, W_n^* = w_n^*$ ，建立相關參數的概似函數，定義設限指標 d_i 如下： $d_i=1$ ，若 W_i^* 得以完整觀測； $d_i=0$ ，當 W_i^* 受制於右設限；否則，若 W_i^* 為左設限資料，則 $d_i=-1$ 。因此，參數 (μ, σ) 的概似函數為

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma) &= \prod_{i:d_i=1} f_W(w_i^*) \prod_{i:d_i=0} S_W(w_i^*) \prod_{i:d_i=-1} [1-S_W(w_i^*)] \\ &= \prod_{i:d_i=1} \left[\frac{1}{\sigma w_i^*} f_\varepsilon(z_i^*) \right] \prod_{i:d_i=0} S_\varepsilon(z_i^*) \prod_{i:d_i=-1} [1-S_\varepsilon(z_i^*)], \end{aligned}$$

其中 $z_i^* = \frac{\log w_i^* - \mu}{\sigma}$,

$$f_\varepsilon(z_i^*) = \frac{e^{-z_i^*}}{(1+e^{-z_i^*})^2},$$

$$S_\varepsilon(z_i^*) = \frac{1}{1+e^{z_i^*}}.$$

因此，

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i:d_i=1} \left[\frac{1}{\sigma w_i^*} \frac{e^{-z_i^*}}{(1+e^{-z_i^*})^2} \right] \prod_{i:d_i=0} \left(\frac{1}{1+e^{z_i^*}} \right) \prod_{i:d_i=-1} \left(\frac{e^{z_i^*}}{1+e^{z_i^*}} \right)$$

其對數概似函數為

$$\ell = \ln L(\mu, \sigma)$$

$$= - \sum_{i:d_i=1} [\ln(\sigma w_i^*) + z_i^* + 2\ln(1 + e^{-z_i^*})] - \sum_{i:d_i=0} \ln(1 + e^{z_i^*}) + \sum_{i:d_i=-1} [z_i^* - \ln(1 + e^{z_i^*})] \quad (4)$$

再一次的，我們應用 **R** 統計軟體中的附屬程式 *constrOptim*，根據公式(4)求得 (μ, σ) 的 MLE $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ ，並且估計其共變異數 $COV(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ 。

在(2)式之下，虛無假設 $H_0: \theta_1 = \theta_2$ 及其對立假設 $H_1: \theta_1 \neq \theta_2$ 可改寫為 $H_0: \mu = 0$ 及 $H_1: \mu \neq 0$ 。本節建議使用概似比檢定(likelihood ratio test，記為 LR 檢定)檢定 H_0 。在 H_0 之下，可求得 σ 的 MLE 為 $\tilde{\sigma}$ ，則其最大概似函數為 $L(0, \tilde{\sigma})$ 。在一般的參數空間中，其最大概似函數為 $L(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ 。因此，在 H_0 之下概似比統計量

$$-2\ln \Lambda = -2[\ln L(0, \tilde{\sigma}) - \ln L(\hat{\mu}, \hat{\sigma})]$$

的漸近分配為自由度為 1 的卡方分配。

所以，若 $-2\ln \Lambda > \chi_{1,\alpha}^2$ ，則宣稱成對存活邊際分配有差異。

針對右設限存活資料，Caroni (2008)假設 T_{i1} 及 T_{i2} 為獨立的成對且其邊際分配為具有相同形狀參數 β 的韋伯分配，因此，隨機變數 $\ln(T_{i1} / T_{i2})$ 是服從位置參數為 $\mu^* = \ln(\theta_1 / \theta_2)$ ，尺度參數為 $\sigma^* = 1/\beta$ 的羅吉斯分配。所以，本節的研究可視為將 Caroni (2008)的概似比檢定推廣至一般具相關程度存活資料的工作。

值得一提的是，在模式

$$\ln W_i = \mu + \sigma \varepsilon_i, \quad i=1, \dots, n$$

之下，當 β 固定時，若 δ 小(相關係數 ρ 大)，則 σ 亦小，因此， $\ln W_i$ 的變異較小，根據此一資料所做的概似比檢定之檢定力較高。若 δ 固定，則 β 愈大，對應概似比檢定之檢定力亦愈高。所以，成對資料若是高度相關且邊際韋伯分配具較大的形狀參數，則可預期其概似比檢定愈能偵測出異於 0 的位置參數 μ 。

第三章 模擬研究

3.1 模擬方法

本節利用模擬研究比較本文第二章所提的二個概似比檢定的型 I 誤差率估計和檢定力估計，利用成對存活時間建立之概似比檢定記作 LRT1，根據存活時間比率建立的概似比檢定則記為 LRT2。本文將在 $n=20,30$ 和 50 之下估計檢定的型 I 誤差率估計，另外，在 $n=50$ 之下估計檢定力估計。模擬研究中考量的成對存活時間為具有相同形狀參數 $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ 的二元韋伯分配，其中 β 可能為 $0.5, 1$ 和 2 。設限分配則為 $U(0, r_j)$ ， $j=1, 2$ ，其中 r_j 依設限比例而訂。此外，考慮相關係數 ρ 自 0 至 0.9 ，間隔 0.1 ，有十種不同的正相關情形。所有計算工作都是使用 **R** 統計軟體完成的。

本研究重覆次數為 $1,000$ 次，因此，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，型 I 誤差率估計的標準誤差約為 $0.007 (\sqrt{(0.05)(0.95)/1000})$ ，檢定力估計量的最大標準誤差約為 $0.016 (\sqrt{(0.5)(0.5)/1000})$ 。在虛無假說成立下，計算 $1,000$ 次當中拒絕虛無假說的比例，此為型 I 誤差率估計值。檢定力估計值則是對立假說成立時， $1,000$ 次當中拒絕虛無假說的比例。

3.2 模擬研究

表一是研究在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 及樣本數 n 之下，兩種成對資料檢定方法之型 I 誤差率估計表現。在完整資料下，當樣本數為 30 時，兩種方法的概似比檢定之型 I 誤差率估計值都接近 0.05。當兩存活時間的右設限比例相同，在樣本數為 30 時，兩種檢定方法皆有高估現象，遠離理論值 0.05，但是當樣本數提高到 50 時，兩種檢定方法皆有改善在型 I 誤差率估計值之表現。當只有一存活時間存在設限資料，LRT1 之型 I 誤差率估計值在樣本數為 50 時，仍靠近 0.05，但 LRT2 之型 I 誤差率估計值幾乎為理論值的兩倍。主要原因是因為資訊的不平衡，型 I 誤差率是在虛無假設為真的情況下，拒絕虛無假設的機率，當兩存活時間的分配相同時，若有一邊發生設限，則因為不知實際存活時間為多少，因此易拒絕虛無假說；反之，當兩存活時間皆存在右設限時，因為在虛無假說下，且兩存活時間可能同時設限，此時兩邊資訊不足的情況是相似的，所以不會有資訊不平衡的狀況。

表二主要研究在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 及樣本數 $n=50$ 之下，兩種成對資料檢定方法之檢定力估計表現。在兩存活時間設限比例皆為 20% 下，且兩尺度比例 $\theta_1/\theta_2=1.2$ ，從表二可知在相同的相關係數下，當形狀參數 β 越大，檢定力估計值越大。此外，由表二可發現檢定力隨著

兩存活時間設限比例增加而減少。圖二展示在成對存活時間設限比例皆為 20%、形狀參數 $\beta = 0.5$ 、樣本數 $n=50$ 、顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，兩種成對資料檢定方法之檢定力與相關係數曲線圖。由圖二可見兩種成對資料檢定方法之檢定力皆隨著兩尺度比例 θ_1/θ_2 增加而增加。此外，在兩尺度比例 θ_1/θ_2 相同下，可發現 LRT1 的檢定力皆大於等於 LRT2 的檢定力。從圖二也可看出，檢定力隨著相關係數增加而增加，尤其在 $\rho \geq 0.6$ 時，檢定力曲線上升速度增加。

模擬結果顯示針對具相關的成對資料，若其邊際分配為具相同形狀參數的韋伯分配，則當樣本數 $n=50$ 時，不論比較型 I 誤差率或檢定力，皆可發現根據成對存活時間建立之概似比檢定比根據存活時間比率建立之概似比檢定表現好。

第四章 實例分析

為研究燒燙傷病患接受捐贈者同種異體皮膚移植於燒燙傷的部位時，移植之後的皮膚可能會受到原有皮膚中淋巴抗原 (human lymphocyte antigen, HLA) 所影響，Batchelor和Hackett (1970) 進行下述實驗：在11位病患燒燙傷部位植入符合與不符合淋巴抗原之皮膚，觀察從病人接受皮膚移植到皮膚產生排斥反應的時間即為研究的存活時間，在研究期限內無排斥反應則為設限，資料列在表三。由表三可知HLA抗原與病患符合之資料與HLA抗原與病患不符合之資料的設限比例分別為18%(約20%)與0%。

圖三展示燒燙傷患者植皮資料之 Kaplan-Meier 估計。由圖三可見移植符合與不符合淋巴抗原皮膚產生排斥時間的兩組存活函數，在後期的差異有擴大的趨勢。由圖三的對數累積風險函數圖 (log cumulative hazard plot)，可檢驗兩個存活時間的邊際分配是否為韋伯分配。因為兩圖形幾乎呈線性，除了後半段因資料少跳動大，所以，兩個存活時間的邊際分配皆服從韋伯分配。為檢驗兩形狀參數是否相等，本章使用概似比檢定檢定虛無假設 $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta$ 。概似比統計量為

$$-2\ln \Lambda = -2[\ln L(\hat{\beta}, \hat{\beta}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\delta}) - \ln L(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\delta})] = 3.017,$$

對應的 p 值為 0.082，因此，沒有足夠證據顯示兩形狀參數不同。故此筆資料符合二元韋伯分配且形狀參數相同的假設。

根據成對存活時間所建立的概似函數可得參數 $(\theta_1, \theta_2, \beta, \delta)$ 的 MLE 為(46.722,27.309,1.873,0.563)。所以，尺度比例 $\theta_1 / \theta_2 = 1.7$ 、形狀參數 $\beta \doteq 2$ ，且 $\hat{\delta} / \hat{\beta} = 0.3$ 。在 $\beta = 1.873$ ， $\delta = 0.563$ 之下，相關係數為 $\rho = 0.580$ 。根據成對存活時間建立之概似比檢定的概似比統計量為 9.473，對應的 p 值為 0.002。此外，根據存活時間比率所建立的概似函數可得參數 (μ, σ) 的 MLE 為(0.456,0.310)，其中 $\hat{\theta}_1 / \hat{\theta}_2 = e^{0.456} \doteq 1.6$ 。因此，兩種成對資料檢定方法所得的 $\hat{\theta}_1 / \hat{\theta}_2$ 與 $\hat{\delta} / \hat{\beta}$ 估計值都很相近。根據存活時間比率建立之概似比檢定的概似比統計量為 6.414，對應的 p 值為 0.011。因此，兩種檢定方法在 $\alpha = 0.05$ 下，結論皆相同，亦即有足夠證據顯示燒燙傷病患接受捐贈者同種異體皮膚移植於燒燙傷的部位時，移植之後的皮膚會受到原有皮膚中淋巴抗原所影響。本實例的結論與楊政學(2006)的結論相同。但是，若 $\alpha = 0.01$ ，則上述二種概似比檢定結果略有不同。此時，根據成對存活時間建立的概似比檢定得以偵測出不同的邊際韋伯分配。這個結論與本文的模擬研究結果亦相符。

第五章 結論與討論

本文就一般的可能右設限之成對存活時間資料提出概似比檢定，檢定兩個服從二元韋伯分配的存活時間之邊際韋伯分配是否相同。研究結果顯示，無論是在維持型 I 誤差率或是檢定力的表現方面，根據成對存活時間建立之概似比檢定比根據存活時間比率建立之概似比檢定佳。事實上，前者允許兩個存活時間的形狀參數與尺度參數皆不同，不似後者受制使用於具有相同形狀參數的二元韋伯分配，因此，本文建議使用根據成對存活時間建立的概似比檢定，進行二元韋伯分配中，邊際分配是否相同的檢定。

實務上，收集的成對資料除存活時間外，可能包含與病人生理狀態(例如:性別、年齡、體重等)或病情(例如:燒燙傷面積、有無抽煙習慣等)有關的共變數，則處理效應可能與共變數相關，未來可考慮共變數對形狀參數、尺度參數，以及相依參數 δ 之影響，探討將共變數納入不同參數後，建立概似比檢定。最後，值得一提的是，本文所使用的二元韋伯分配屬關聯結構函數之一，因此，往後亦可使用不同的關聯結構函數建立各式的二元分配，並在此分配之下建立概似比檢定。

參考文獻

1. Batchelor, J. R. and Hackett, M. (1970). HLA matching in treatment of burned patients with skin allografts. *Lancet* **2**, 581-583.
2. Caroni, C. (2008). Tests for censored paired data. *Statistical Methodology*.
3. Dabrowska, D.M. (1986). Rank tests for independence for bivariate censored data. *The Annals of Statistics* **14**, 250-264.
4. Frees, E.W. and Valdez E.A. (1998). Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Journal* **2**, 1-25.
5. Gumbel, E.J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association* **55**, 698-707.
6. Hanagal, D.D. (2005). Bivariate Weibull regression model based on censored samples. *Statistical Papers* **47**, 137-148.
7. Hougaard, P. (1986). A class of multivariate failure time distributions. *Biometrika* **73**, 671-678.
8. Jones, M.P. and Yoo, B. (2005). Linear signed-rank tests for paired survival data subject to a common censoring time. *Lifetime Data Analysis* **11**, 351-365.
9. Jung, S.H. (1999). Rank tests for matched survival data. *Lifetime Data Analysis* **5**, 67-79.
10. Kendall, M.G. (1962). *Rank correlation methods*. Griffin, London.
11. Lee, L. (1979). Multivariate distributions having Weibull properties, *Journal of Multivariate Analysis* **9**, 267-277.
12. Lu, J.C. and Bhattacharyya, G.K. (1990). Some new constructions of bivariate Weibull models. *Annal of the Institute of Statistical Mathematics* **42**, 543-559.

13. Lu, J. C. and Bhattacharyya, G. K. (1991). Inference procedures for a bivariate exponential model of Gumbel. *Statistics and Probability Letters* **12**, 37-50.
14. Lu, W. (2007). Tests of independence for censored bivariate failure time data. *Lifetime Data Analysis* **13**, 75–90.
15. Mantel, N., and Byar, O.P. (1974). Evaluation of response-time data involving transient states: An illustration using heart-transplant data. *Journal of the American Statistical Association* **69**, 81-86.
16. Murray, S. (2001). Using weighted Kaplan-Meier statistics in nonparametric comparisons of paired censored survival outcomes. *Biometrics* **57**, 361-368.
17. Nelsen, R. (1999). *An introduction to copulas*. Springer, New York.
18. O'Brien, P. C. and Fleming, T. R. (1987). A paired Prentice-Wilcoxon test for censored paired data. *Biometrics* **43**, 169-180.
19. Owen, W. J., Sinha D. and Capozoli, M.H. (2000). A paired-data analysis for a lifetime distribution. *The American Statistician* **54**, 252-256.
20. Woolson, R. F. and O'Gorman, T. W. (1992). A comparison of several tests for censored paired data. *Statistics in Medicine* **11**, 193-208.
21. 楊政學. (2006). 成對右設限資料檢定之研究。國立中央大學統計研究所碩士論文。

附錄 關聯結構函數(Copula function)

關聯結構函數是根據個別邊際分配建構多元聯合分配的方法。令 T_1, \dots, T_n 的累積分配函數分別為 F_1, \dots, F_n ，則 (T_1, \dots, T_n) 的累積分配函數 $F(t_1, \dots, t_n)$ 可表示為 $C[F_1(t_1), \dots, F_n(t_n)]$ ，其中函數 C 滿足下列三個條件：

1. $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ ；
2. C 是遞增的函數；
3. C 的所有邊際函數 C_i 滿足：

$$C_i(u) = C(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u, \text{ 其中 } u \in [0,1]$$

Sklar(1983)的定理進一步確定了，就連續型隨機變數的聯合分配函數而言，此一函數的唯一性。因此，得知 (T_1, \dots, T_n) 的聯合機率密度函數 $f(t_1, \dots, t_n)$ 可展為

$$\begin{aligned} f(t_1, \dots, t_n) &= \frac{\partial F(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_1 \dots \partial t_n} = \frac{\partial C(F_1(t_1), \dots, F_n(t_n))}{\partial t_1 \dots \partial t_n} = \frac{\partial C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \times \prod_{i=1}^n \frac{\partial F_i(t_i)}{\partial t_i} \\ &= c(u_1, \dots, u_n) \times \prod_{i=1}^n f_i(t_i) \end{aligned}$$

其中 $u_i = F_i(t_i)$, $i = 1, \dots, n$,

$c(u_1, \dots, u_n)$ 為關聯結構的密度函數。

關聯結構函數最早於 1959 年由 Sklar 以法文提出，近來相關的研究應用成長速度非常快，在 Frees and Valdez (1998) 對其有廣泛

的討論。建構關聯結構函數，可以考慮生成函數 $\phi:[0,1] \rightarrow [0,\infty)$ ，滿足

$$\phi(1) = 0, \quad \phi'(t) < 0, \quad \phi''(t) > 0, \quad 0 < t < 1$$

當關聯結構函數為

$$C_\phi(u_1, u_2) = \phi^{-1}\left[\sum_{i=1}^2 \phi(u_i)\right], \quad u_i \in [0,1], \quad i = 1, 2$$

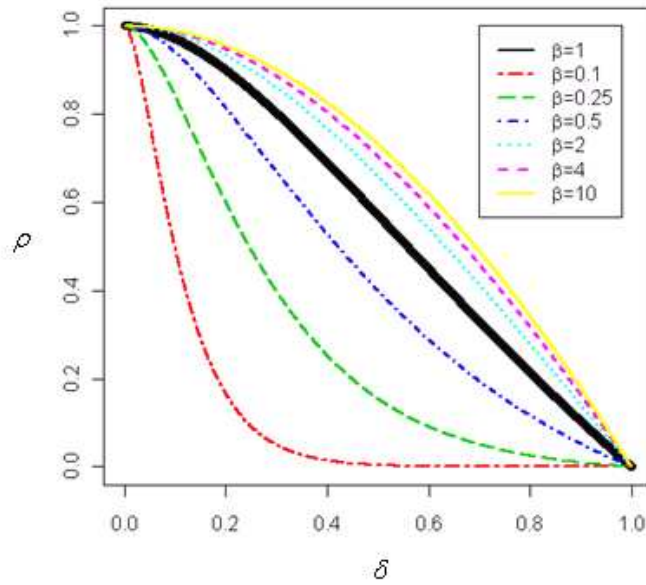
則稱其為二維阿基米德關聯結構函數(Archimedean copulas)。

Gumbel copula(1960)為阿積米德關聯結構函數

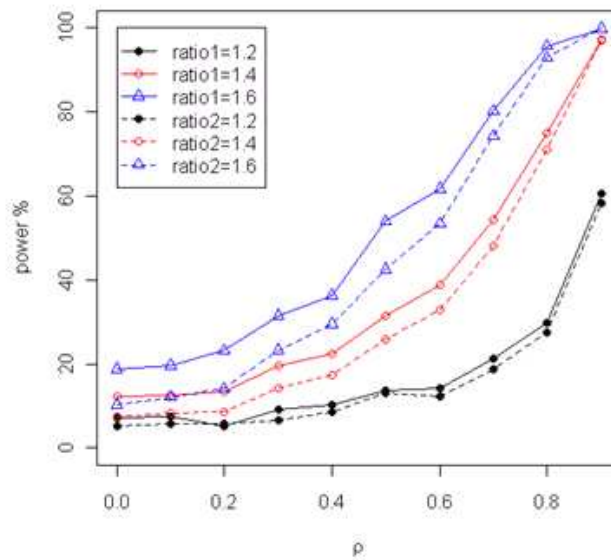
$$\begin{aligned} \phi(t) &= (-\ln t)^\alpha; \quad \alpha \geq 1 \\ \Rightarrow C_\phi(u_1, u_2) &= \exp\{-[(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha]^{1/\alpha}\} \end{aligned}$$

其中 α 為衡量兩變數間相關性之參數，Hougaard (1986) 所提二元

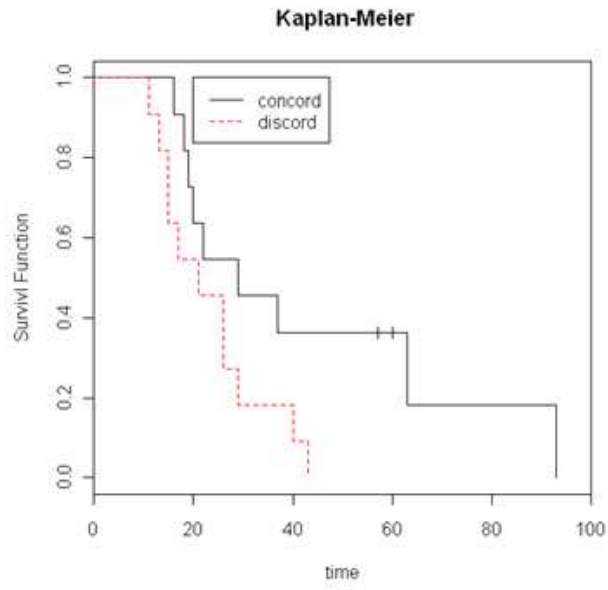
韋伯分配也是 Gumbel(1960)關聯結構函數。



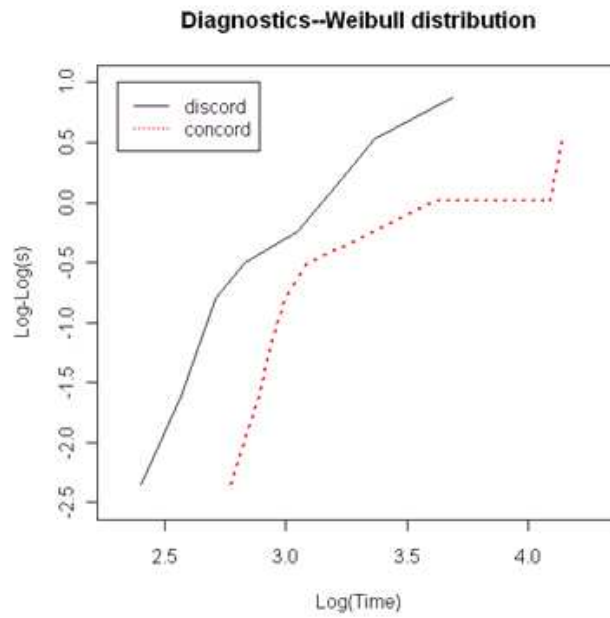
圖一 具有相同形狀參數的二元韋伯分配之下，相關係數 ρ 與相依參數 δ 之函數關係圖。



圖二 成對存活時間設限比例為20%、形狀參數 $\beta=0.5$ 、樣本數 $n=50$ 、顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，兩種成對資料檢定方法之檢定力與相關係數曲線圖。



圖三 燒燙傷患者植皮資料之 Kaplan-Meier 估計



圖四 燒燙傷患者植皮資料之對數累積風險函數圖

表一 在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 及樣本數 n 之下，兩種成對資料檢定方法之型 I 誤差率估計

(a) $\beta = 0.5$

設限 比例 (%)	n	檢定	相關係數									
			0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
(0,0)	20	LRT1	0.066	0.066	0.058	0.054	0.069	0.061	0.074 ⁺	0.051	0.076 ⁺	0.067
		LRT2	0.057	0.072 ⁺	0.048	0.055	0.070	0.061	0.072 ⁺	0.051	0.074 ⁺	0.065
	30	LRT1	0.052	0.052	0.060	0.053	0.064	0.058	0.063	0.055	0.065	0.053
		LRT2	0.050	0.050	0.053	0.049	0.056	0.060	0.059	0.058	0.061	0.058
	50	LRT1	0.056	0.063	0.050	0.054	0.056	0.048	0.065	0.068	0.053	0.052
		LRT2	0.051	0.059	0.053	0.043	0.050	0.059	0.066	0.066	0.052	0.053
(20,0)	20	LRT1	0.070	0.068	0.047	0.064	0.059	0.060	0.065	0.069	0.068	0.064
		LRT2	0.099 ⁺	0.087 ⁺	0.069	0.088 ⁺	0.090 ⁺	0.098 ⁺	0.076 ⁺	0.082 ⁺	0.078 ⁺	0.073 ⁺
	30	LRT1	0.050	0.051	0.054	0.053	0.048	0.059	0.060	0.070	0.060	0.056
		LRT2	0.100 ⁺	0.101 ⁺	0.077 ⁺	0.098 ⁺	0.084 ⁺	0.105 ⁺	0.079 ⁺	0.089 ⁺	0.075 ⁺	0.072 ⁺
	50	LRT1	0.051	0.058	0.045	0.046	0.051	0.054	0.057	0.059	0.061	0.057
		LRT2	0.141 ⁺	0.131 ⁺	0.099 ⁺	0.117 ⁺	0.104 ⁺	0.125 ⁺	0.096 ⁺	0.082 ⁺	0.078 ⁺	0.066
(20,20)	20	LRT1	0.067	0.064	0.043	0.064	0.062	0.052	0.072 ⁺	0.066	0.080 ⁺	0.065
		LRT2	0.052	0.064	0.048	0.058	0.063	0.054	0.070	0.068	0.072 ⁺	0.066
	30	LRT1	0.046	0.056	0.056	0.053	0.054	0.060	0.065	0.072 ⁺	0.065	0.056
		LRT2	0.048	0.060	0.047	0.051	0.047	0.058	0.060	0.073 ⁺	0.065	0.056
	50	LRT1	0.049	0.053	0.049	0.044	0.046	0.057	0.049	0.054	0.065	0.052
		LRT2	0.051	0.049	0.045	0.044	0.049	0.054	0.048	0.059	0.065	0.054
(40,40)	20	LRT1	0.066	0.068	0.061	0.064	0.076 ⁺	0.074 ⁺	0.057	0.071	0.075 ⁺	0.067
		LRT2	0.054	0.063	0.059	0.065	0.076 ⁺	0.065	0.056	0.070	0.075 ⁺	0.069
	30	LRT1	0.051	0.058	0.070	0.054	0.058	0.069	0.070	0.072 ⁺	0.072 ⁺	0.058
		LRT2	0.040	0.057	0.056	0.061	0.058	0.068	0.071	0.072 ⁺	0.072 ⁺	0.057
	50	LRT1	0.046	0.058	0.057	0.043	0.044	0.057	0.055	0.057	0.070	0.059
		LRT2	0.043	0.054	0.053	0.038	0.052	0.060	0.053	0.054	0.071	0.059

+: 為型 I 誤差率估計 > 0.071

續表一

(b) $\beta = 1$

設限 比例 (%)	n	檢定	相關係數									
			0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
(0,0)	20	LRT1	0.066	0.062	0.057	0.059	0.066	0.061	0.074 ⁺	0.053	0.075 ⁺	0.066
		LRT2	0.057	0.072 ⁺	0.048	0.055	0.070	0.061	0.072 ⁺	0.051	0.074 ⁺	0.065
	30	LRT1	0.052	0.052	0.060	0.054	0.065	0.064	0.063	0.058	0.064	0.053
		LRT2	0.050	0.050	0.053	0.049	0.056	0.060	0.059	0.058	0.061	0.058
	50	LRT1	0.056	0.064	0.047	0.057	0.058	0.051	0.066	0.068	0.054	0.055
		LRT2	0.051	0.059	0.053	0.043	0.05	0.059	0.066	0.066	0.052	0.053
(20,0)	20	LRT1	0.071	0.066	0.056	0.065	0.072 ⁺	0.045	0.074 ⁺	0.058	0.074 ⁺	0.065
		LRT2	0.098 ⁺	0.097 ⁺	0.062	0.092 ⁺	0.087 ⁺	0.089 ⁺	0.077 ⁺	0.080 ⁺	0.080 ⁺	0.076 ⁺
	30	LRT1	0.055	0.051	0.062	0.065	0.054	0.069	0.071	0.063	0.067	0.058
		LRT2	0.110 ⁺	0.109 ⁺	0.089 ⁺	0.095 ⁺	0.088 ⁺	0.103 ⁺	0.098 ⁺	0.088 ⁺	0.074 ⁺	0.071
	50	LRT1	0.041	0.061	0.047	0.046	0.059	0.049	0.050	0.065	0.064	0.049
		LRT2	0.144 ⁺	0.117 ⁺	0.104 ⁺	0.112 ⁺	0.116 ⁺	0.127 ⁺	0.101 ⁺	0.093 ⁺	0.090 ⁺	0.065
(20,20)	20	LRT1	0.065	0.072 ⁺	0.059	0.053	0.069	0.059	0.071	0.068	0.077 ⁺	0.072 ⁺
		LRT2	0.051	0.066	0.047	0.054	0.073 ⁺	0.057	0.060	0.069	0.076 ⁺	0.070
	30	LRT1	0.047	0.056	0.055	0.059	0.043	0.054	0.076 ⁺	0.063	0.078 ⁺	0.059
		LRT2	0.049	0.060	0.053	0.058	0.034	0.055	0.073 ⁺	0.064	0.067	0.060
	50	LRT1	0.046	0.057	0.040	0.047	0.057	0.063	0.056	0.057	0.065	0.061
		LRT2	0.048	0.052	0.040	0.045	0.050	0.057	0.050	0.059	0.062	0.053
(40,40)	20	LRT1	0.070	0.069	0.061	0.059	0.077 ⁺	0.070	0.079 ⁺	0.069	0.073 ⁺	0.065
		LRT2	0.057	0.075 ⁺	0.054	0.057	0.077 ⁺	0.064	0.074 ⁺	0.073 ⁺	0.074 ⁺	0.061
	30	LRT1	0.051	0.058	0.062	0.059	0.063	0.076 ⁺	0.075 ⁺	0.075 ⁺	0.079 ⁺	0.056
		LRT2	0.048	0.056	0.061	0.059	0.055	0.064	0.072 ⁺	0.080 ⁺	0.075 ⁺	0.058
	50	LRT1	0.045	0.055	0.058	0.058	0.045	0.067	0.054	0.056	0.067	0.051
		LRT2	0.047	0.049	0.051	0.047	0.049	0.063	0.056	0.060	0.069	0.045

+: 為型 I 誤差率估計 > 0.071

續表一

(c) $\beta = 2$

設限 比例 (%)	n	檢定	相關係數									
			0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
(0,0)	20	LRT1	0.066	0.059	0.059	0.057	0.060	0.064	0.069	0.054	0.073 ⁺	0.067
		LRT2	0.057	0.072 ⁺	0.048	0.055	0.070	0.061	0.072 ⁺	0.051	0.074 ⁺	0.065
	30	LRT1	0.052	0.054	0.061	0.056	0.064	0.061	0.067	0.058	0.062	0.054
		LRT2	0.050	0.050	0.053	0.049	0.056	0.060	0.059	0.058	0.061	0.058
	50	LRT1	0.056	0.062	0.045	0.055	0.053	0.050	0.066	0.068	0.057	0.055
		LRT2	0.051	0.059	0.053	0.043	0.050	0.059	0.066	0.066	0.052	0.053
(20,0)	20	LRT1	0.056	0.071	0.057	0.065	0.072 ⁺	0.065	0.076 ⁺	0.060	0.073 ⁺	0.075 ⁺
		LRT2	0.078 ⁺	0.095 ⁺	0.060	0.087 ⁺	0.071	0.077 ⁺	0.070	0.064	0.084 ⁺	0.071
	30	LRT1	0.052	0.044	0.069	0.071	0.059	0.060	0.058	0.069	0.075 ⁺	0.050
		LRT2	0.098 ⁺	0.093 ⁺	0.080 ⁺	0.085 ⁺	0.065	0.101 ⁺	0.075 ⁺	0.078 ⁺	0.074 ⁺	0.058
	50	LRT1	0.047	0.056	0.044	0.050	0.062	0.054	0.069	0.062	0.059	0.052
		LRT2	0.118 ⁺	0.096 ⁺	0.087 ⁺	0.096 ⁺	0.093 ⁺	0.103 ⁺	0.085 ⁺	0.079 ⁺	0.082 ⁺	0.066
(20,20)	20	LRT1	0.061	0.075 ⁺	0.066	0.069	0.071	0.066	0.077 ⁺	0.071	0.075 ⁺	0.068
		LRT2	0.056	0.069	0.049	0.068	0.062	0.062	0.076 ⁺	0.074 ⁺	0.073 ⁺	0.064
	30	LRT1	0.049	0.046	0.063	0.058	0.050	0.066	0.078 ⁺	0.067	0.068	0.051
		LRT2	0.051	0.058	0.061	0.063	0.044	0.057	0.072 ⁺	0.074 ⁺	0.060	0.058
	50	LRT1	0.044	0.066	0.044	0.046	0.069	0.050	0.055	0.057	0.051	0.049
		LRT2	0.047	0.048	0.049	0.051	0.054	0.051	0.052	0.053	0.049	0.050
(40,40)	20	LRT1	0.071	0.082 ⁺	0.074 ⁺	0.070	0.062	0.081 ⁺	0.078 ⁺	0.059	0.073 ⁺	0.086 ⁺
		LRT2	0.061	0.078 ⁺	0.056	0.067	0.071	0.076 ⁺	0.080 ⁺	0.072 ⁺	0.078 ⁺	0.082 ⁺
	30	LRT1	0.060	0.062	0.065	0.067	0.053	0.072 ⁺	0.077 ⁺	0.077 ⁺	0.071	0.052
		LRT2	0.051	0.058	0.062	0.061	0.047	0.060	0.086 ⁺	0.068	0.079 ⁺	0.052
	50	LRT1	0.057	0.055	0.059	0.061	0.062	0.060	0.076 ⁺	0.054	0.056	0.058
		LRT2	0.050	0.055	0.050	0.048	0.049	0.057	0.065	0.056	0.062	0.056

+: 為型 I 誤差率估計 > 0.071

表二 在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 及樣本數 $n=50$ 之下，兩種成對資料檢
定方法之檢定力估計

(a) $\beta = 0.5$

設限 比例 (%)	θ_1/θ_2	檢定	相關係數									
			0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
(0,0)	1.2	LRT1	0.073	0.085	0.072	0.106	0.125	0.170	0.195	0.278	0.423	0.787
		LRT2	0.065	0.082	0.070	0.096	0.107	0.170	0.191	0.286	0.423	0.788
	1.4	LRT1	0.148	0.148	0.170	0.249	0.284	0.427	0.499	0.708	0.891	0.999
		LRT2	0.119	0.133	0.151	0.223	0.260	0.414	0.479	0.691	0.888	0.999
	1.6	LRT1	0.241	0.252	0.304	0.437	0.466	0.678	0.764	0.915	0.994	1.000
		LRT2	0.175	0.213	0.257	0.393	0.459	0.652	0.755	0.906	0.994	1.000
(20,0)	1.2	LRT1	0.084	0.089	0.058	0.088	0.112	0.155	0.176	0.235	0.342	0.667
		LRT2	0.221	0.229	0.205	0.267	0.248	0.306	0.325	0.397	0.489	0.750
	1.4	LRT1	0.143	0.149	0.146	0.232	0.245	0.359	0.427	0.601	0.808	0.985
		LRT2	0.294	0.324	0.348	0.444	0.457	0.573	0.594	0.750	0.900	0.996
	1.6	LRT1	0.226	0.226	0.264	0.377	0.429	0.596	0.681	0.866	0.983	1.000
		LRT2	0.375	0.447	0.477	0.600	0.635	0.759	0.821	0.933	0.990	1.000
(20,20)	1.2	LRT1	0.073	0.076	0.053	0.092	0.104	0.138	0.143	0.213	0.299	0.607
		LRT2	0.051	0.059	0.057	0.066	0.086	0.130	0.124	0.188	0.275	0.584
	1.4	LRT1	0.123	0.125	0.134	0.195	0.225	0.316	0.388	0.544	0.751	0.974
		LRT2	0.075	0.083	0.087	0.142	0.173	0.257	0.328	0.480	0.709	0.969
	1.6	LRT1	0.188	0.196	0.232	0.315	0.363	0.540	0.617	0.803	0.957	0.999
		LRT2	0.103	0.121	0.141	0.233	0.295	0.425	0.534	0.743	0.930	0.999
(40,40)	1.2	LRT1	0.070	0.072	0.070	0.082	0.085	0.115	0.131	0.165	0.240	0.477
		LRT2	0.051	0.057	0.063	0.059	0.073	0.095	0.113	0.147	0.215	0.443
	1.4	LRT1	0.096	0.118	0.114	0.166	0.172	0.241	0.308	0.422	0.635	0.921
		LRT2	0.059	0.071	0.075	0.107	0.133	0.182	0.252	0.355	0.573	0.899
	1.6	LRT1	0.142	0.174	0.180	0.269	0.291	0.416	0.503	0.675	0.873	0.994
		LRT2	0.072	0.097	0.101	0.166	0.208	0.295	0.403	0.578	0.830	0.990

續表二

(b) $\beta = 1$

設限 比例 (%)	θ_1/θ_2	檢定	相關係數									
			0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
(0,0)	1.2	LRT1	0.167	0.157	0.160	0.220	0.235	0.316	0.348	0.510	0.681	0.954
		LRT2	0.128	0.129	0.133	0.186	0.208	0.294	0.336	0.496	0.677	0.957
	1.4	LRT1	0.427	0.428	0.465	0.555	0.592	0.745	0.812	0.931	0.994	1.000
		LRT2	0.290	0.335	0.372	0.504	0.546	0.707	0.787	0.913	0.994	1.000
	1.6	LRT1	0.673	0.706	0.742	0.834	0.879	0.954	0.981	0.999	1.000	1.000
		LRT2	0.499	0.572	0.638	0.759	0.832	0.930	0.973	0.999	1.000	1.000
(20,0)	1.2	LRT1	0.149	0.143	0.128	0.193	0.198	0.260	0.296	0.404	0.579	0.885
		LRT2	0.311	0.334	0.313	0.392	0.373	0.462	0.480	0.591	0.713	0.931
	1.4	LRT1	0.357	0.369	0.393	0.486	0.524	0.644	0.738	0.867	0.981	1.000
		LRT2	0.502	0.571	0.570	0.677	0.695	0.796	0.847	0.928	0.990	1.000
	1.6	LRT1	0.615	0.645	0.668	0.771	0.811	0.907	0.956	0.992	1.000	1.000
		LRT2	0.705	0.761	0.773	0.856	0.896	0.954	0.979	0.999	1.000	1.000
(20,20)	1.2	LRT1	0.130	0.126	0.112	0.156	0.163	0.223	0.262	0.332	0.485	0.815
		LRT2	0.084	0.079	0.081	0.107	0.124	0.172	0.198	0.291	0.433	0.782
	1.4	LRT1	0.299	0.300	0.335	0.406	0.444	0.559	0.646	0.789	0.946	0.997
		LRT2	0.153	0.178	0.193	0.270	0.309	0.416	0.537	0.698	0.901	0.996
	1.6	LRT1	0.507	0.545	0.573	0.659	0.722	0.833	0.892	0.956	0.998	1.000
		LRT2	0.259	0.296	0.350	0.447	0.524	0.693	0.789	0.918	0.991	1.000
(40,40)	1.2	LRT1	0.103	0.116	0.107	0.133	0.131	0.187	0.210	0.259	0.368	0.662
		LRT2	0.062	0.070	0.076	0.087	0.099	0.138	0.142	0.197	0.326	0.625
	1.4	LRT1	0.228	0.250	0.262	0.309	0.347	0.442	0.527	0.647	0.827	0.984
		LRT2	0.091	0.122	0.136	0.163	0.217	0.292	0.386	0.529	0.754	0.972
	1.6	LRT1	0.395	0.436	0.430	0.528	0.595	0.728	0.792	0.898	0.974	0.999
		LRT2	0.152	0.187	0.214	0.298	0.367	0.497	0.611	0.787	0.947	0.998

續表二

(c) $\beta = 2$

設限 比例 (%)	θ_1/θ_2	檢定	相關係數									
			0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
(0,0)	1.2	LRT1	0.473	0.480	0.505	0.572	0.586	0.731	0.770	0.891	0.982	1.000
		LRT2	0.335	0.366	0.388	0.507	0.535	0.678	0.732	0.873	0.981	1.000
	1.4	LRT1	0.925	0.931	0.945	0.973	0.980	0.997	1.000	1.000	1.000	1.000
		LRT2	0.784	0.847	0.864	0.940	0.962	0.990	1.000	1.000	1.000	1.000
	1.6	LRT1	0.999	0.999	0.999	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		LRT2	0.970	0.974	0.992	0.997	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
(20,0)	1.2	LRT1	0.397	0.410	0.429	0.497	0.507	0.612	0.666	0.806	0.951	0.997
		LRT2	0.507	0.544	0.542	0.623	0.626	0.719	0.766	0.869	0.971	0.999
	1.4	LRT1	0.886	0.881	0.893	0.948	0.951	0.980	0.996	1.000	1.000	1.000
		LRT2	0.854	0.893	0.909	0.952	0.968	0.989	0.997	1.000	1.000	1.000
	1.6	LRT1	0.995	0.990	0.995	0.998	0.998	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		LRT2	0.981	0.981	0.993	0.997	0.998	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
(20,20)	1.2	LRT1	0.336	0.333	0.353	0.391	0.418	0.520	0.573	0.667	0.851	0.989
		LRT2	0.169	0.194	0.224	0.247	0.291	0.400	0.449	0.590	0.786	0.979
	1.4	LRT1	0.774	0.806	0.815	0.886	0.892	0.934	0.969	0.993	0.999	1.000
		LRT2	0.472	0.541	0.548	0.656	0.723	0.825	0.894	0.975	0.999	1.000
	1.6	LRT1	0.963	0.955	0.979	0.994	0.991	0.996	0.999	1.000	1.000	1.000
		LRT2	0.707	0.797	0.826	0.915	0.938	0.976	0.993	0.999	1.000	1.000
(40,40)	1.2	LRT1	0.247	0.274	0.277	0.305	0.321	0.384	0.467	0.534	0.704	0.911
		LRT2	0.121	0.145	0.157	0.174	0.203	0.259	0.319	0.403	0.607	0.869
	1.4	LRT1	0.636	0.680	0.678	0.752	0.763	0.832	0.887	0.956	0.991	0.999
		LRT2	0.265	0.357	0.383	0.447	0.509	0.630	0.731	0.867	0.976	0.997
	1.6	LRT1	0.879	0.892	0.895	0.948	0.965	0.975	0.988	0.999	1.000	1.000
		LRT2	0.457	0.548	0.602	0.703	0.769	0.851	0.929	0.982	1.000	1.000

表三 燒燙傷患者植皮之資料

HLA抗原與病 患符合	37	19	57 ⁺	93	16	22	20	18	63	29	60 ⁺
HLA抗原與病 患不符合	29	13	15	26	11	17	26	21	43	15	40

+: 為設限資料